

# Nghiên cứu dao động riêng của dầm hai lớp có lỗ rỗng vi mô trên nền đàn hồi pasternak chịu nén dọc trục

Free vibration analysis of a two-layer beam with microscale porous voids on a pasternak elastic foundation under axial compression

> GS.TS HOÀNG XUÂN LƯỢNG<sup>1</sup>, THS NGUYỄN XUÂN QUÂN<sup>2</sup>, THS LÊ TUẤN ANH<sup>3</sup>,  
TS NGUYỄN CHÍ THỌ<sup>1,\*</sup>, THS NGUYỄN BÁ NGỌC THẢO<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Học viện Kỹ thuật quân sự; \*Email: chitho.mta@gmail.com

<sup>2</sup>Sở Xây dựng Hà Nội, TP Hà Nội

<sup>3</sup>Cục Kinh tế quản lý đầu tư xây dựng, Bộ Xây dựng

<sup>4</sup>Khoa Kỹ thuật công trình, Đại học Lạc Hồng

## TÓM TẮT

Cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, ngành vật liệu xây dựng cũng đã phát minh và sử dụng nhiều loại vật liệu tiên tiến và một trong số đó chính là vật liệu có lỗ rỗng. Đây là loại vật liệu có khả năng chịu nhiệt và cách âm hiệu quả, đặc biệt là sử dụng làm kết cấu trong công trình xây dựng. Nghiên cứu này dựa trên lời giải dạng giải tích để chỉ ra đáp ứng dao động riêng của dầm hai lớp làm từ vật liệu chứa lỗ rỗng vi mô, tựa trên nền đàn hồi hai hệ số với điều kiện biên tựa đơn hai đầu và chịu tải nén dọc theo trục dầm. Các biểu thức tính toán được thiết lập dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Timoshenko với hệ số hiệu chỉnh cắt  $k=5/6$ , trong đó ảnh hưởng của lỗ rỗng đến các đặc trưng cơ tính vật liệu được mô tả bằng hàm phụ thuộc chiều dày dầm. Thông qua các phép biến đổi linh hoạt, công thức chính xác đối với tần số dao động riêng của dầm được xác định. Sự tin cậy của lời giải được minh chứng thông qua so sánh với các kết quả đã công bố trước đây. Cuối cùng, ảnh hưởng của các số tham số hình học, vật liệu của dầm và của lực nén dọc trục đến các tần số dao động riêng đầu tiên của dầm cũng được tính toán và bình luận cụ thể, qua đó góp phần làm rõ ứng xử dao động và cung cấp cơ sở khoa học giúp cho các kỹ sư tham khảo khi thiết kế kết cấu dạng dầm hai lớp có lỗ rỗng.

**Từ khóa:** Dao động riêng; lỗ rỗng; Timoshenko; lời giải Navier; nền đàn hồi Pasternak; nén dọc trục.

## ABSTRACT

With the advancement of science and technology, the field of construction materials has developed and adopted various advanced materials, among which porous materials have gained significant attention. These materials exhibit excellent thermal resistance and acoustic insulation properties, making them particularly suitable for structural applications in construction. This study employs an analytical solution to investigate the free vibration response of a two-layer beam composed of microscale porous materials, resting on a two-parameter elastic foundation, with simply supported boundary conditions at both ends and subjected to axial compressive loading. The governing equations are formulated based on the first-order shear deformation theory of Timoshenko, with a shear correction factor of  $k=5/6$ . The influence of porosity on the material properties is described by a thickness-dependent function. Through appropriate mathematical transformations, an exact expression for the natural frequencies of the beam is derived. The reliability of the proposed solution is validated through comparisons with previously published results. Finally, the effects of geometric parameters, material properties, and axial compressive load on the first natural frequencies of the beam are evaluated and discussed in detail. The findings contribute to a better understanding of the vibration behavior and provide a scientific basis for engineers in the design of porous two-layer beam structures.

**Keywords:** Free vibration; porosity; Timoshenko beam theory; Navier solution; Pasternak elastic foundation; axial compression.

**1. ĐẶT VẤN ĐỀ**

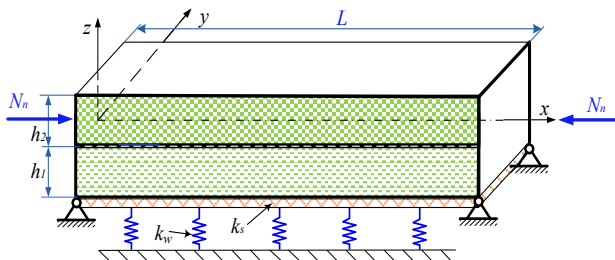
Trong thực tế kỹ thuật xây dựng, khi kết cấu chính được đặt tựa trên một kết cấu khác, người ta có thể mô tả như kết cấu chính tựa trên nền đàn hồi. Mặt khác, để giảm trọng lượng của các kết cấu, các nhà khoa học có thể áp dụng nhiều giải pháp khác nhau như sử dụng vật liệu nhẹ hoặc tối ưu hóa thiết kế kết cấu. Trong số đó, việc tạo ra các lỗ rỗng bên trong vật liệu được xem là một phương pháp hiệu quả. Bên cạnh tác dụng làm giảm khối lượng, sự tồn tại của các lỗ rỗng còn giúp cải thiện khả năng cách âm và cách nhiệt của vật liệu so với vật liệu đặc. Nhờ những ưu điểm này, vật liệu có lỗ rỗng ngày càng được quan tâm và ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật, đặc biệt là trong ngành Xây dựng.

Việc tính toán đáp ứng của các kết cấu dầm trên nền đàn hồi cũng được các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu và đã đạt được một số thành quả. Liên [1] đã kết hợp giữa lý thuyết dầm dạng hàm lượng giác và phần tử hai điểm nút để phân tích dao động tự do của dầm nhiều lớp có lỗ rỗng. Trên cơ sở nhiều lý thuyết biến dạng cắt khác nhau, Trường và các cộng sự [2] đã phân tích dao động của dầm nhiều lớp có lớp bề mặt là vật liệu FGM và lớp lõi là vật liệu FGM dưới nhiều điều kiện biên khác nhau trên cơ sở phương pháp Ritz. Chen và cộng sự [3] cũng xuất phát từ phương pháp Ritz để nghiên cứu dao động tự do và dao động cưỡng bức của dầm được chế tạo từ vật liệu có lỗ rỗng. Charles [4] đã dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để chỉ rõ uốn tĩnh của dầm tựa trên nền đàn hồi. Zghal và các đồng nghiệp [5] đã áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để làm rõ ảnh hưởng của lỗ rỗng vật liệu đến đáp ứng uốn tĩnh của dầm.

Trên cơ sở các kết quả đã nghiên cứu rộng rãi, ta có thể nhận thấy rằng bài toán dao động riêng của dầm hai lớp làm từ vật liệu có lỗ rỗng, tựa trên nền đàn hồi và chịu tác dụng của tải trọng nén dọc theo trục dầm, vẫn chưa được chỉ ra cụ thể bằng công thức giải tích cụ thể. Đây là cách tiếp cận có ý nghĩa thực tiễn vì công thức giải tích cho phép đánh giá nhanh ảnh hưởng của các tham số thiết kế mà không cần chạy mô phỏng số. Do đó, mục tiêu của nghiên cứu này là thiết lập công thức chính xác định tần số dao động riêng của dầm hai lớp có lỗ rỗng vì mô, tựa trên nền đàn hồi Pasternak, chịu tải trọng nén dọc trục, trên cơ sở lý thuyết dầm Timoshenko và nghiệm Navier."

**2. THIẾT LẬP CÔNG THỨC XÁC ĐỊNH TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA DẦM HAI LỚP CÓ LỖ RỔNG**

Hình 1 trình bày mô hình dầm hai lớp tựa trên nền đàn hồi hai hệ số chịu tải trọng nén dọc theo trục dầm  $N_n$ . Dầm có chiều dài là  $L$  và mặt cắt ngang có chiều dày tổng là  $h$ , dầm gồm hai lớp vật liệu với lớp trên ( $h_2$ ) và lớp dưới ( $h_1$ ) có chiều dày bằng nhau  $h_1=h_2$ .



Hình 1. Dầm hai lớp có lỗ rỗng chịu nén dọc theo trục dầm

Dầm được chế tạo từ vật liệu có lỗ rỗng, thể tích lỗ rỗng trong mỗi lớp của dầm:

$$\begin{cases} \psi_r^{(1)} = \psi_0 \left\{ 1 + k \sin \left( \frac{\pi(4z+h)}{2h} \right) \right\} & : -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \\ \psi_r^{(2)} = \psi_0 \left\{ 1 - k \sin \left( \frac{\pi(4z-h)}{2h} \right) \right\} & : 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (1)$$

trong đó  $k$  là tham số thể hiện mức độ phân bố các lỗ rỗng, còn  $\psi_0$  là thể tích lỗ rỗng tương ứng với trường hợp  $k = 0$ .

Các đặc trưng cơ tính vật liệu gồm mô đun đàn hồi và hệ số Poát xng trong lớp thứ  $i$  ( $i=1-2$ ) phụ thuộc vào chiều dày theo tỷ lệ lỗ rỗng:

$$\begin{cases} E^{(i)}(z) = E_0^{(i)} (1 - \psi_p^{(i)}) \\ \nu^{(i)}(z) = \nu_0^{(i)} (1 - \psi_p^{(i)}) \end{cases} \quad (2)$$

trong đó  $E_0$  và  $\nu_0$  là mô đun đàn hồi và hệ số Poát xng của vật liệu trong trường hợp không có lỗ rỗng vì mô  $\psi_p = 0$ .

Để thiết lập biểu thức tính toán cụ thể, nghiên cứu này sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Timoshenko, do vậy các chuyển vị:

$$\begin{cases} W_x = W_{0x} + z\theta_x \\ W_z = W_{0z} \end{cases} \quad (3)$$

với  $W_{0x}(x,0)$ ,  $W_{0z}(x,0)$  là chuyển vị dọc theo trục dầm và chuyển vị vuông góc với trục dầm tại vị trí  $z = 0$ , và  $\theta_x$  là góc xoay của pháp tuyến của mặt cắt ngang dầm.

Hai thành phần biến dạng bao gồm biến dạng dài dọc theo trục dầm và biến dạng góc:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{\partial W_{0x}}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \epsilon_{0x} + z\kappa_{1x} \\ \gamma_{xz} &= \theta_x + \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó:

$$\epsilon_{0x} = \frac{\partial W_{0x}}{\partial x}, \quad \kappa_{1x} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (5)$$

Hai thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp trong lớp thứ  $i$  có dạng:

$$\begin{cases} \sigma_x^{(i)} = E^{(i)} \epsilon_{xx} \\ \tau_{xz}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{2(1+\nu^{(i)})} \gamma_{xz} \end{cases} \quad (6)$$

Để tìm ra phương trình cân bằng cho dầm này, nghiên cứu này sử dụng nguyên lý công ảo:

$$\delta\Theta_d + \delta\Theta_N - \delta\Theta_c - \delta\Theta_l = 0 \quad (7)$$

với  $\delta\Theta_d$ ,  $\delta\Theta_N$ ,  $\delta\Theta_c$ ,  $\delta\Theta_l$  lần lượt là công ảo của nội lực, công ảo của nền, công ảo của lực nén tác dụng lên dầm và công ảo của lực quán tính.

Công ảo của dầm do nội lực:

$$\begin{aligned}
 \delta\Theta_d &= \int_S \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \left( \sigma_x^{(1)} \delta\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}^{(1)} \delta\gamma_{xz} \right) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\frac{h}{2}} \left( \sigma_x^{(2)} \delta\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}^{(2)} \delta\gamma_{xz} \right) dz \right) dS \\
 &= \int_S \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \left( \varepsilon_{0x}^T E^{(1)} \delta\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0x}^T z E^{(1)} \delta\kappa_{1x} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \kappa_{1x}^T E^{(1)} z \delta\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{1x}^T E^{(1)} z^2 \delta\kappa_{1x} \right) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\frac{h}{2}} \left( \varepsilon_{0x}^T E^{(2)} \delta\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0x}^T z E^{(2)} \delta\kappa_{1x} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \kappa_{1x}^T E^{(2)} z \delta\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{1x}^T E^{(2)} z^2 \delta\kappa_{1x} \right) dz \right) dS \\
 &\quad + \int_S \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \left( \gamma_{xz} \left( \frac{5}{12} \frac{E^{(1)}}{1+\nu^{(1)}} \right) \delta\gamma_{xz} \right) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\frac{h}{2}} \left( \gamma_{xz} \left( \frac{5}{12} \frac{E^{(2)}}{1+\nu^{(2)}} \right) \delta\gamma_{xz} \right) dz \right) dS \\
 &= \int_S \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \left( \frac{\partial^2 W_{0x}}{\partial x^2} E^{(1)} \delta W_{0x} + \frac{\partial^2 W_{0x}}{\partial x^2} z E^{(1)} \delta\theta_x \right) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} z E^{(1)} \delta W_{0x} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} E^{(1)} z^2 \delta\theta_x \right) dz \right) dS \\
 &\quad + \int_S \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \left( \frac{\partial^2 W_{0x}}{\partial x^2} E^{(2)} \delta W_{0x} + \frac{\partial^2 W_{0x}}{\partial x^2} z E^{(2)} \delta\theta_x \right) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} z E^{(2)} \delta W_{0x} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} E^{(2)} z^2 \delta\theta_x \right) dz \right) dS \\
 &\quad + \int_S \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \left( \left( \theta_x + \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} \right) \left( \frac{E^{(1)}}{2(1+\nu^{(1)})} \right) \delta\theta_x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_{0z}}{\partial x^2} \right) \left( \frac{5E^{(1)}}{12(1+\nu^{(1)})} \right) \delta W_{0z} \right) dz \right) dS \\
 &\quad + \int_S \left( \int_0^{\frac{h}{2}} \left( \left( \theta_x + \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} \right) \left( \frac{E^{(2)}}{2(1+\nu^{(2)})} \right) \delta\theta_x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_{0z}}{\partial x^2} \right) \left( \frac{5E^{(2)}}{12(1+\nu^{(2)})} \right) \delta W_{0z} \right) dz \right) dS \tag{8}
 \end{aligned}$$

Công ảo do ảnh hưởng của nền đàn hồi:

$$\delta\Theta_N = \int_{\Omega} \left( k_w W_{0z} \delta W_{0z} + k_s \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} \delta \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} \right) d\Omega \tag{9}$$

trong đó  $k_w$  và  $k_s$  tương ứng là hai hệ số độ cứng của nền đàn hồi.

Công ảo của lực quán tính:

$$\begin{aligned}
 \delta\Theta_I &= b \int_L \rho \left[ \left( \ddot{W}_{0x} + z \ddot{\theta}_x \right) \delta \left( W_{0x} + z \theta_x \right) \right. \\
 &\quad \left. - \ddot{W}_{0z} \delta W_{0z} \right] dx \\
 &= b \int_L \rho \left[ \ddot{W}_{0x} \delta W_{0x} + z \ddot{W}_{0x} \delta \theta_x + z \ddot{\theta}_x \delta W_{0x} \right. \\
 &\quad \left. + z^2 \ddot{\theta} \delta \theta_x + \ddot{W}_{0z} \delta W_{0z} \right] dx \tag{10}
 \end{aligned}$$

Công ảo của lực nén tác dụng lên dầm:

$$\delta\Theta_c = b \int_L N_n \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} \delta \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} dx \tag{11}$$

với  $N_n$  là lực nén dọc trục dầm.

Kết hợp các biểu thức (8)-(11) và phương trình (7), ta thu được phương trình cân bằng cho dầm:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{0x} : &\left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 E^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} E^{(2)} dz \right) \frac{\partial^2 W_{0x}}{\partial x^2} \\
 &+ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 z E^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} z E^{(2)} dz \right) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \\
 &+ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \rho^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \rho^{(2)} dz \right) \ddot{W}_{0x} \\
 &+ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 z \rho^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} z \rho^{(2)} dz \right) \ddot{\theta}_x = 0 \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\theta_x : &\left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 z E^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} z E^{(2)} dz \right) \frac{\partial^2 W_{0x}}{\partial x^2} \\
 &+ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 z^2 E^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 E^{(2)} dz \right) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \\
 &+ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \frac{5E^{(1)}}{12(1+\nu^{(1)})} dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{5E^{(2)}}{12(1+\nu^{(2)})} dz \right) \left( \theta_x + \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} \right) \\
 &+ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 z \rho^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} z \rho^{(2)} dz \right) \ddot{W}_{0x} \\
 &+ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 z^2 \rho^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 \rho^{(2)} dz \right) \ddot{\theta}_x = 0 \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_{0z} : &\frac{5}{12} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \frac{E^{(1)}}{1+\nu^{(1)}} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{E^{(2)}}{1+\nu^{(2)}} dz \right) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_{0z}}{\partial x^2} \right) \\
 &+ k_w W_{0z} + k_s \frac{\partial^2 W_{0z}}{\partial x^2} - N_c \frac{\partial^2 W_{0z}}{\partial x^2} \\
 &+ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \rho^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \rho^{(2)} dz \right) \ddot{W}_{0z} = 0 \tag{14}
 \end{aligned}$$

Hoặc có thể viết ở dạng gọn hơn:

$$H_A \frac{\partial^2 W_{0x}}{\partial x^2} + H_B \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + I_{01} \ddot{W}_{0x} + I_{02} \ddot{\theta}_x = 0 \quad (15)$$

$$H_B \frac{\partial^2 W_{0x}}{\partial x^2} + H_C \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + H_D \left( \theta_x + \frac{\partial W_{0z}}{\partial x} \right) + I_{02} \ddot{W}_{0x} + I_{03} \ddot{\theta}_x = 0 \quad (16)$$

$$H_D \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_{0z}}{\partial x^2} \right) + k_w W_{0z} + k_s \frac{\partial^2 W_{0z}}{\partial x^2} - N_c \frac{\partial^2 W_{0z}}{\partial x^2} + I_{01} \ddot{W}_{0z} = 0 \quad (17)$$

với các hệ số:

$$H_A = \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 E^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} E^{(2)} dz \right); H_B = \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 z E^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} z E^{(2)} dz \right)$$

$$H_C = \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 z^2 E^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 E^{(2)} dz \right);$$

$$H_D = \frac{5}{12} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 \frac{E^{(1)}}{1+\nu^{(1)}} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{E^{(2)}}{1+\nu^{(2)}} dz \right)$$

$$\{I_{01}, I_{02}, I_{03}\} = \left( \int_{-\frac{h}{2}}^0 (1, z, z^2) E^{(1)} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) E^{(2)} dz \right);$$

Giả sử dầm chịu liên kết tựa đơn hai đầu, dạng nghiệm Navier được nghiên cứu này sử dụng:

$$\begin{aligned} W_{0x} &= \sum_{s=1}^{\infty} T_{0x}(t) \cos\left(\frac{s\pi x}{L}\right) \\ \theta_x &= \sum_{s=1}^{\infty} T_{\theta}(t) \cos\left(\frac{s\pi x}{L}\right) \\ W_{0z} &= \sum_{s=1}^{\infty} T_{0z}(t) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

Từ (15)-(18), ta rút ra:

$$-H_A T_{0x} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 - H_B T_{\theta} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + I_{01} \frac{\partial^2 T_{0x}}{\partial t^2} + I_{02} \frac{\partial^2 T_{\theta}}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

$$-H_B T_{0x} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + \left[ H_D - H_C \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right] T_{\theta} + H_D T_{0z} \frac{s\pi}{L} + I_{02} \frac{\partial^2 T_{0x}}{\partial t^2} + I_{03} \frac{\partial^2 T_{\theta}}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

$$-H_D \left( T_{\theta} \frac{s\pi}{L} + T_{0z} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right) + k_w T_{0z} - k_s T_{0z} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + N_c T_{0z} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + I_{01} \frac{\partial^2 T_{0z}}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

Do các thành phần quán tính của  $V_{0x}$ ,  $l_{02}$  và  $l_{03}$  rất nhỏ so với  $l_{01}$  nên người ta có thể bỏ qua, do đó, phương trình trên dẫn đến liên hệ:

$$H_A \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 T_{0x} + H_B \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 T_{\theta} = 0 \quad (22)$$

$$-H_B \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 T_{0x} + \left[ H_D - H_C \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right] T_{\theta} + H_D \frac{s\pi}{L} T_{0z} = 0 \quad (23)$$

$$-H_D \frac{s\pi}{L} T_{\theta} + \left[ -H_D \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + k_w - k_s T_{0z} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + N_c \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right] T_{0z} + I_{01} \frac{\partial^2 T_{0z}}{\partial t^2} = 0 \quad (24)$$

Từ hai phương trình (22)-(24), ta có

$$T_{\theta} = K_{w\theta} T_{0z}$$

với:

$$K_{w\theta} = - \frac{H_D H_A \left(\frac{s\pi}{L}\right)^3}{\left[ H_B^2 \left(\frac{s\pi}{L}\right)^4 + \left[ \frac{H_D}{-H_C \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2} \right] H_A \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right]} \quad (25)$$

thế (26) vào phương trình (25), ta được:

$$\left[ -H_D \frac{s\pi}{L} K_{w\theta} + \left[ -H_D \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + k_w - k_s T_{0z} \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + N_c \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right] \right] + I_{01} \frac{\partial^2 T_{0z}}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

Phương trình (26), ta sẽ thu được tần số dao động riêng thứ  $s$  của dầm nhiều lớp trên nền đàn hồi hai hệ số chịu tác dụng của lực nén dọc trục:

$$\Omega_s^2 = \frac{\left[ -H_D \frac{s\pi}{L} K_{w\theta} + \left[ -H_D \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + k_w - k_s \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 + N_c \left(\frac{s\pi}{L}\right)^2 \right] \right]}{I_{01}} \quad (27)$$

### 3. TÍNH TOÁN SỐ

#### 3.1. So sánh để chứng tỏ độ tin cậy

Xét dầm có chiều dài  $L$ , chiều cao  $h$ . Vật liệu làm dầm có  $E = 380 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 3960 \text{ kg/m}^3$ , vật liệu nhôm oxit  $Al_2O_3$  theo [6], dầm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số với công thức chuẩn hóa  $\bar{K}_w = \frac{k_w L^4}{EI}$ ,  $\bar{K}_s = \frac{k_s L^2}{EI\pi^2}$ . Bảng 1 so sánh tần số

không thứ nguyên đầu tiên  $\omega_{kin} = \sqrt{\Omega L^2 \sqrt{\frac{12\rho}{E.h^2}}}$  với kết

quả tính toán bằng phương pháp cầu phương vi phân [6] và phương pháp giải tích [7]. Bằng việc nhìn vào kết quả so sánh trong Bảng 1, ta có thể nhận thấy chúng tương đồng nhau, điều này chứng minh sự tin cậy của phương pháp nghiên cứu của bài báo này.

Bảng 1. So sánh tần số không thứ nguyên đầu tiên của dầm trên nền đàn hồi hai hệ số

$(\bar{K}_w, \bar{K}_s)$	(0, 0)	(0, 2.5)	(0, 1)	(10 <sup>2</sup> , 0)	(10 <sup>2</sup> , 2.5)	(10 <sup>2</sup> , 1)
[6]	3.14	4.29	3.73	3.74	4.58	4.14
[7]	3.14	4.29	3.73	3.74	4.58	4.14
Bài báo	3.14	4.29	3.73	3.74	4.58	4.14

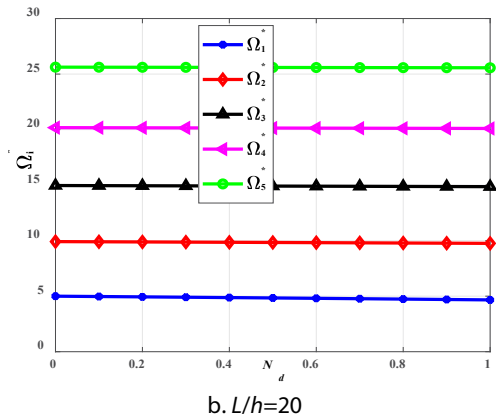
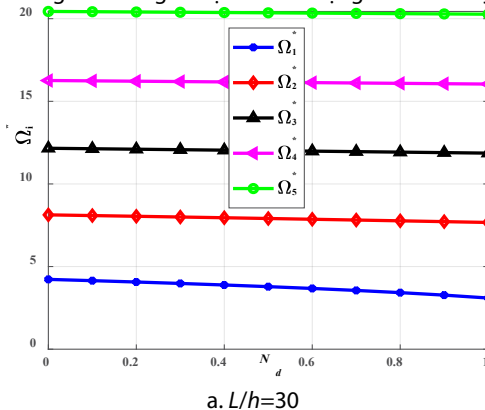
#### 3.2. Tính toán số và thảo luận

Trên cơ sở các công thức tính toán đã lập ở mục 2, phần này đưa ra các số liệu tính toán cụ thể cho bài toán dao động riêng của dầm hai lớp chịu tải trọng nén dọc trục. Thông số hình học và vật liệu của dầm bao gồm chiều dài  $L = 2 \text{ m}$ ,  $E_0 = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu_0 = 0.3$ ,  $\rho_0 = 2700 \text{ kg/m}^3$ , tải nén dọc trục dầm là  $N_c = N_d \cdot 10^5 \text{ N/m}$ . Nền đàn hồi có các tham số độ cứng  $k_w^* = k_w \frac{12L^4}{E_0 h_0^3}$ ;  $k_s^* = k_s \frac{12L^2}{E_0 h_0^3}$ . Thông số khảo sát là tần số dao động riêng thứ  $i$  của dầm được chuẩn hóa theo công thức:

$$\Omega_i^* = \Omega(i) L^2 \sqrt{\frac{12\rho}{E.h_0^2}}, \text{ với } h_0 = L/50.$$

- Ảnh hưởng của lực nén tác dụng lên dầm:

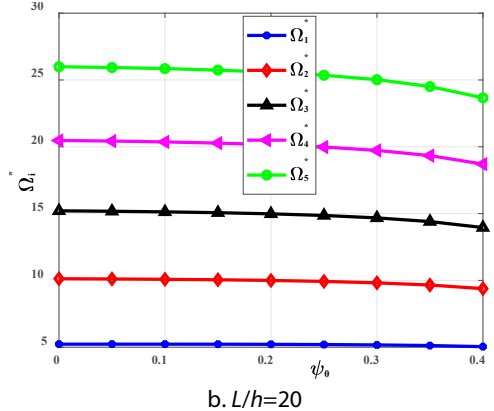
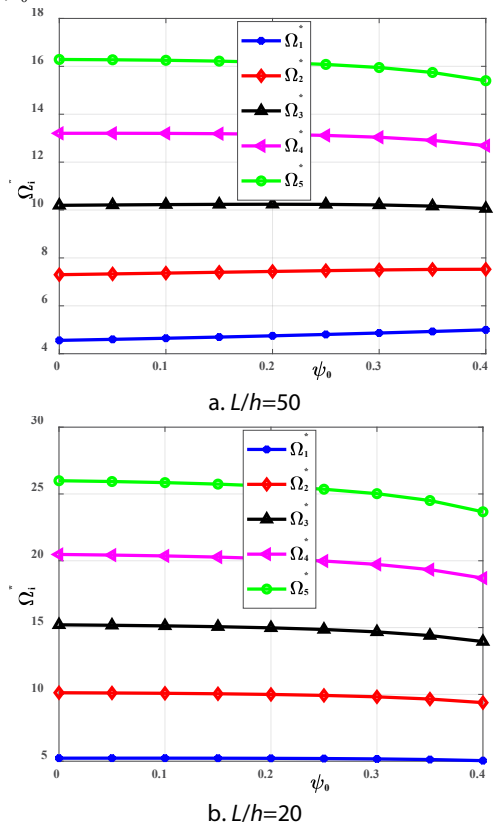
Để xem xét đáp ứng dao động riêng của dầm trong trường hợp tải trọng nén nhận giá trị khác nhau, tiến hành thay đổi độ lớn của  $N_d$  từ 1 đến 10, kết quả tính toán năm tần số dao động riêng đầu tiên của dầm được chỉ ra như trên Hình 2. Khi lực nén tác dụng lên dầm tăng lên thì tần số dao động riêng của dầm giảm xuống, điều này là do khi lực nén có giá trị càng lớn thì năng lượng của dầm càng giảm, do đó độ cứng tổng thể của kết cấu giảm xuống. Do đó tần số dao động của dầm giảm xuống khi lực nén tác dụng lên dầm tăng lên.



Hình 2. Năm tần số đầu tiên của dầm phụ thuộc vào lực nén  $N_d$ ,  $k_w^* = 10$ ,  $k_s^* = 2$ ,  $k=0.4$ ,  $\psi_0 = 0.3$ .

- Ảnh hưởng của thể tích lỗ rỗng  $\psi_0$ :

Tăng dần thể tích lỗ rỗng sao cho tham số  $\psi_0$  biến đổi từ 0 đến 0.4, kết quả tính toán năm tần số dao động riêng đầu tiên của dầm nhiều lớp được vẽ như trên Hình 3. Ta thấy rằng khi tham số  $\psi_0$  có giá trị càng lớn thì tỷ lệ lỗ rỗng trong vật liệu của dầm càng lớn, tần số dao động riêng của dầm composite càng giảm. Tuy nhiên, tần số càng cao thì mức độ giảm của tần số khi tham số  $\psi_0$  tăng lên càng thể hiện rõ rệt.

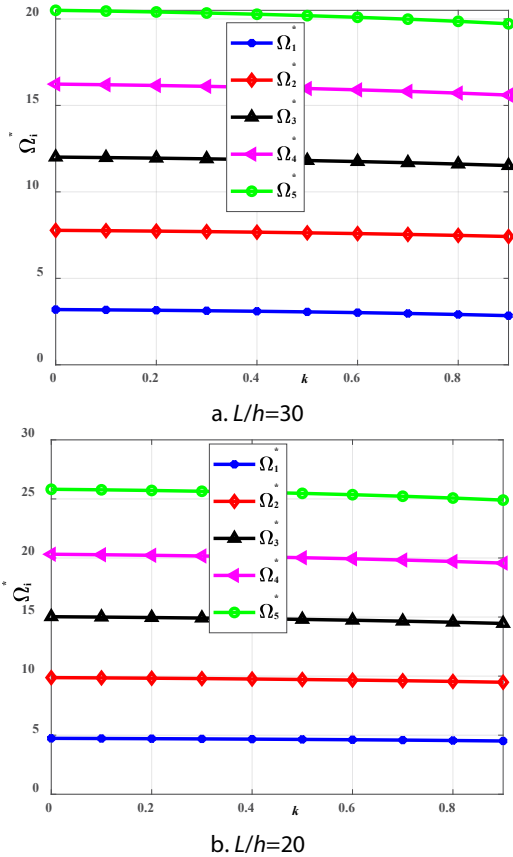


Hình 3. Năm tần số dao động riêng đầu tiên của dầm phụ thuộc vào thể tích lỗ rỗng  $\psi_0$ ,  $N_d=1$ ,  $k_w^* = 20$ ,  $k_s^* = 5$ ,  $k=0.9$ .

- Ảnh hưởng của tham số  $k$ :

Hình 4 thể hiện kết quả tính toán năm tần số dao động riêng đầu tiên của dầm nhiều lớp phụ thuộc vào tham số  $k$  ứng với hai giá trị khác nhau của tỷ lệ  $L/h$ . Khi tăng giá trị của tham số  $k$  thì

tần số dao động của dầm giảm xuống, điều này là do tham số  $k$  càng tăng thì tỷ lệ lỗ rỗng trong dầm càng tăng, do đó dầm trở nên mềm hơn. Tuy nhiên, sự thay đổi của tần số đối với tham số  $k$  không nhiều, nhất ở tần số thấp.



Hình 4. Năm tần số dao động riêng đầu tiên của dầm phụ thuộc tham số phân bố lỗ rỗng  $k$ ,  $N_0=1$ ,  $k_w^*=20$ ,  $k_s^*=5$ ,  $k=0.4$ ,  $\psi_0=0.3$

Từ các kết quả khảo sát trên, có thể rút ra một số nhận định quan trọng cho thiết kế: Lực nén dọc trục có ảnh hưởng đáng kể nhất đến tần số dao động riêng, đặc biệt ở các mode thấp, do đó khi thiết kế dầm chịu nén trên nền đàn hồi cần ưu tiên kiểm tra tần số mode 1. Thể tích lỗ rỗng  $\psi_0$  ảnh hưởng mạnh hơn ở các mode cao, trong khi tham số phân bố  $k$  có ảnh hưởng tương đối nhỏ, cho thấy tổng thể tích lỗ rỗng quan trọng hơn cách phân bố lỗ rỗng. (Dầm dày ( $L/h = 20$ ) có tần số chuẩn hóa cao hơn dầm mỏng ( $L/h = 50$ ) do ảnh hưởng của biến dạng cắt.

#### 4. KẾT LUẬN

Bài báo đã đề xuất lời giải dạng Navier để nghiên cứu dao động riêng của dầm hai lớp tựa trên nền đàn hồi, vật liệu có lỗ rỗng vi mô và chịu tải trọng nén dọc theo trục dầm. Các công thức tính toán được tìm ra trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Timoshenko và được kiểm chứng với các kết quả tính bằng cả phương pháp gần đúng và phương pháp giải tích để khẳng định tính đúng đắn của lý thuyết đã thiết lập. Nghiên cứu này cũng chỉ ra các tính toán số và kèm theo các thảo luận cụ thể đối với tham số hình học và vật liệu của dầm, của lực nén nhằm giúp các nhà khoa học hiểu được quy luật của các đáp ứng tần số, từ đó hiểu rõ hơn cơ chế và quy luật đáp ứng của dầm nhiều lớp trong thực tế. Đây cũng là cơ sở khoa học giúp thiết kế hiệu quả các kết cấu dạng dầm trong kỹ thuật xây dựng một cách có hiệu quả cao.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phạm Thị Ba Liên, Dao động tự do của dầm sandwich cơ tính biến thiên có lỗ rỗng trên nền đàn hồi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt lượng giác, Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải, 74(8), 946-961, 2023.
- [2] Hương Quý Trường; Đặng Xuân Hùng; Trần Minh Tú, Phân tích dao động riêng dầm sandwich FGM xếp với điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp Ritz, Tạp chí Khoa học Công nghệ xây dựng, 15(5V), 15-27, 2021.
- [3] Chen, D.; Yang, J.; Kitipornchai, S., Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams, International Journal of Mechanical Sciences, 108-109, 14-22, 2016.
- [4] Charles, C.L., Static Flexure of First Order Shear Deformable Thick Beam Resting on Two-Parameter Elastic Foundation -Equilibrium Formulation and Closed Form Solutions, NIPES - Journal of Science and Technology Research, 7(1), 235-254, 2025.
- [5] Zghal, S.; Ataoui, D.; Dammak, F., Static bending analysis of beams made of functionally graded porous materials, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 50(3), 1012-1029, 2022.
- [6] Chen, W.Q.; Lü, C.F.; Bian, Z.G., A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation, Applied Mathematical Modelling, 28(10), 877-890, 2004, doi:10.1016/j.apm.2004.04.001.
- [7] Dao Van Doan; Do Van Thom; Dao Van Vuong, Analytical Solution to Investigate the Vibrational Response of a Sandwich Nanobeam, Journal of Vibration Engineering & Technologies, 14, 143, 2026, doi:10.1007/s42417-026-02336-8.