SO SÁNH CÁC PHƯƠNG PHÁP SỐ TRONG PHÂN TÍCH PHI TUYẾN TIẾT DIỆN BÊ TÔNG CỐT THÉP CHỊU UỐN

COMPARISON OF NUMERICAL METHODS IN NONLINEAR FLEXURAL ANALYSIS OF RC SECTIONS

TRẦN ĐĂNG BẢO[a,*]
[a]Viện Đào tạo kiến trúc, xây dựng và giao thông, Trường Đại học Thủ Dầu Một
*Tác giả đại diện: *Email*: baotd@tdmu.edu.vn
Ngày nhận 15/6/2025, Ngày sửa 15/8/2025, Chấp nhận 20/8/2025
https://doi.org/10.59382/j-ibst.2025.vi.vol3-2

Tóm tắt: *Bài báo trình bày so sánh ba phương pháp lặp phổ biến trong phân tích phi tuyến tiết diện bê tông cốt thép (BTCT) chịu uốn thuần túy bằng mô hình chia thớ: Newton-Raphson (NR), Newton-Raphson hiệu chỉnh (MoNR) và phương pháp cát tuyến (Secant). Một tiết diện chữ T điển hình được chọn để đánh giá độ chính xác và hiệu quả tính toán. Kết quả cho thấy cả ba thuật toán đều hội tụ ổn định và cho giá trị mô men uốn giới hạn gần như tương đương (sai lệch không vượt quá 0,05%). Tuy nhiên, hiệu suất tính toán giữa các phương pháp có sự khác biệt rõ rệt. Phương pháp NR cho tốc độ hội tụ nhanh và ổn định, đặc biệt hiệu quả trong vùng tải trọng gần trạng thái giới hạn. Phương pháp Secant dù chậm hơn ở các vòng lặp đầu nhưng duy trì ổn định cao trong vùng làm việc phi tuyến mạnh và có ưu thế về tính toán nhờ sử dụng cập nhật ma trận độ cứng xấp xỉ. Ngược lại, phương pháp MoNR cho hiệu suất ban đầu tốt nhưng suy giảm rõ rệt khi tải tiến gần giới hạn. Ngoài ra, mô men uốn giới hạn từ mô hình chia thớ được so sánh với kết quả tính theo phương pháp nội lực giới hạn trong TCVN 5574:2018. Mô hình phi tuyến cho giá trị cao hơn từ 3.27% đến 3.75%, phản ánh rõ khả năng mô phỏng vùng biến dạng dẻo. Tuy nhiên, độ sai lệch nhỏ này cho thấy phương pháp nội lực giới hạn vẫn đảm bảo độ tin cậy và phù hợp cho thiết kế tiết diện uốn chữ T, nhất là khi cần cân đối giữa độ chính xác và tính đơn giản.*

Từ khóa: *mô hình chia thớ; phương pháp Newton-Raphson; phương pháp Newton-Raphson hiệu chỉnh; phương pháp cát tuyến; phân tích phi tuyến, mô men uốn giới hạn, TCVN 5574:2018*

Abstract: *This paper presents a comparison of three common iterative methods in the nonlinear flexural analysis of reinforced concrete (RC) sections using the fiber model: Newton-Raphson (NR), Modified Newton-Raphson (MoNR), and the Secant method. A typical T-shaped cross-section is selected to assess both computational accuracy and efficiency. The results show that all three algorithms converge reliably and yield nearly identical ultimate bending moments (deviations below 0.05%), confirming the consistency and reliability of the analysis model. However, significant differences are observed in computational performance. The NR method demonstrates rapid and stable convergence, particularly effective under load levels approaching the ultimate state. Although the Secant method converges more slowly in early iterations, it maintains strong stability in the highly nonlinear regime and achieves efficient performance by using approximate stiffness updates. In contrast, MoNR performs well at low load levels but deteriorates markedly as the system approaches the limit state. Additionally, the ultimate bending moments obtained from the fiber-based nonlinear model are 3.27% to 3.75% higher than those computed using the limit internal force method specified in TCVN 5574:2018, reflecting the contribution of plastic deformation. Nonetheless, the small deviation confirms that the code-based method remains reliable and practical for the design of T-beam sections, especially when balancing accuracy and simplicity is required.*

Keywords: *fiber model; Newton-Raphson method; Modified Newton-Raphson method; Secant method; nonlinear analysis; ultimate bending moment; TCVN 5574:2018.*

1. Giới thiệu

Tiêu chuẩn TCVN 5574:2018 [1, 2] đã tích hợp mô hình phi tuyến cho bê tông và cốt thép, mở ra hướng tiếp cận phân tích hiện đại trong thiết kế kết cấu. Tuy vậy, việc ứng dụng chủ yếu vẫn dừng ở mức giải tích, với phạm vi còn hạn chế – đặc biệt đối với tiết diện không chữ nhật [3–9].

Phương pháp chia thớ [10-12] có khả năng mô phỏng chính xác ứng xử phi tuyến bằng cách chia tiết

diện thành các phần tử nhỏ và gán mô hình vật liệu riêng cho từng phần tử. Tuy nhiên, đến nay vẫn chưa có nghiên cứu nào [3-9] tích hợp mô hình vật liệu theo [1] vào khung tính toán mô hình chia thớ bằng phương pháp số.

Để giải bài toán phi tuyến, nhiều thuật toán số đã được phát triển, trong đó đáng chú ý là phương pháp Newton-Raphson (NR), Newton-Raphson hiệu chỉnh (MoNR) và phương pháp Cát tuyến (Secant). Với các bài toán có thể phát sinh hiện tượng mất ổn định hình học kiểu lật đột ngột (snap-through) hoặc quay ngược (snap-back), phương pháp theo độ dài cung (arc-length method) thường được khuyến nghị [13]. Tuy nhiên, với đặc điểm đơn giản hóa của biểu đồ ứng xử vật liệu trong TCVN 5574:2018 [1] nhằm phục vụ thiết kế thực tiễn, việc sử dụng phương pháp theo độ dài cung trong phân tích tiết diện không cần thiết và gây giảm tốc độ tính toán.

Tổng quan các nghiên cứu hiện hành cho thấy tồn tại khoảng cách đáng kể giữa định hướng của tiêu chuẩn và khả năng triển khai thực tế bằng các công cụ số hiện hành, đặc biệt đối với các phương pháp chia thớ. Điều này làm nổi bật nhu cầu cấp thiết trong việc phát triển các giải pháp số phù hợp nhằm vừa đảm bảo tuân thủ tiêu chuẩn kỹ thuật, vừa nâng cao độ tin cậy và hiệu quả thiết kế kết cấu theo hướng tiếp cận phi tuyến.

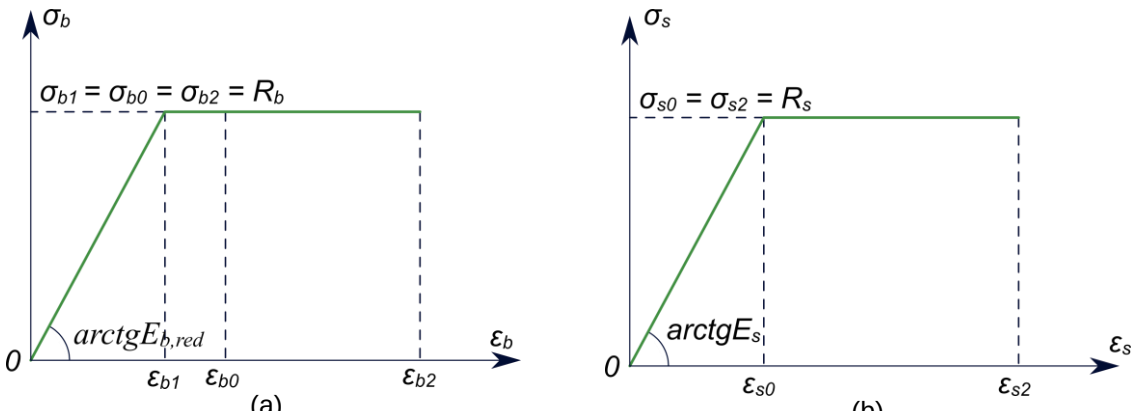
Nghiên cứu này nhằm đạt được hai mục tiêu chính:

- So sánh mô men uốn giới hạn thu được từ phân tích phi tuyến với kết quả tính toán theo phương pháp nội lực giới hạn quy định trong tiêu chuẩn TCVN 5574:2018, áp dụng cho tiết diện chữ T;

- Đánh giá và so sánh hiệu suất tính toán của ba thuật toán giải bài toán phi tuyến phổ biến – NR, MoNR và Secant – thông qua phân tích phi tuyến tiết diện BTCT chữ T chịu uốn thuần túy, với các mức mô men tăng dần từ thấp đến gần giới hạn chịu uốn cuối cùng.

2. Biểu đồ quan hệ ứng suất và biến dạng của bê tông và cốt thép

TCVN 5574:2018 [1] cho phép sử dụng biểu đồ hai đoạn thẳng như Hình 1 để mô tả quan hệ ứng suất-biến dạng phi tuyến của bê tông chịu nén và cốt thép trong hai trạng thái kéo và nén nhằm đơn giản hóa tính toán kiểm tra độ bền. Trong nghiên cứu này, biểu đồ lý tưởng hóa nêu trên được áp dụng trong mô hình chia thớ để so sánh hiệu quả của ba phương pháp số trong phân tích phi tuyến tiết diện BTCT chịu uốn. Các phương trình cụ thể được trình bày trong [1]. Ngoài ra, cường độ chịu kéo của bê tông được bỏ qua, và giả thiết bê tông và cốt thép hoàn toàn dính bám.



Hình 1. *Biểu đồ ứng suất-biến dạng của bê tông chịu nén (a) và cốt thép chịu kéo (b) sử dụng trong thiết kế*

3. Phân tích phi tuyến tiết diện BTCT

Phân tích phi tuyến tiết diện BTCT theo mô hình chia thớ nhằm xác định trường biến dạng – bao gồm biến dạng dọc trục và độ cong – sao cho thỏa mãn điều kiện cân bằng nội lực dưới tác dụng tải trọng. Do đặc tính phi tuyến của quan hệ ứng suất-biến dạng vật liệu và sự tương quan lẫn nhau giữa nội lực và biến dạng, bài toán này yêu cầu áp dụng các phương pháp số lặp nhằm bảo đảm nghiệm hội tụ và chính xác.

3.1 Phương pháp số giải phi tuyến

Bài toán phi tuyến của tiết diện BTCT được biểu diễn dưới dạng phương trình cân bằng:

$$P(u) = f, \quad (1)$$

trong đó: $P(u)$ là vector nội lực phụ thuộc phi tuyến vào biến dạng u;

K là ma trận độ cứng của tiết diện;

u là vector biến dạng chưa biết;

f là vector tải trọng ngoài.

Vì $P(u)$ là hàm phi tuyến của u, nên việc giải phương trình này đòi hỏi các phương pháp số lặp. Quá trình giải bắt đầu từ một giá trị ban đầu u_0, tại mỗi bước lặp, biến dạng được cập nhật bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính để tìm biến dạng hiệu chỉnh Δu. Quá trình tuyến tính hóa và cập nhật biến dạng lặp lại cho đến khi thỏa mãn tiêu chí hội tụ đã định.

Các phương pháp số phổ biến để xác định Δu trong nghiên cứu này bao gồm:

Phương pháp NR: Tuyến tính hóa phương trình cân bằng tại mỗi vòng lặp thông qua ma trận độ cứng tiếp tuyến (Jacobian), được cập nhật liên tục theo trạng thái vật liệu và biến dạng.

Phương pháp MoNR: Chỉ cập nhật ma trận độ cứng tại vòng lặp đầu tiên của mỗi bước tải, sau đó giữ nguyên trong các vòng lặp tiếp theo nhằm giảm chi phí tính toán mà vẫn đảm bảo độ chính xác chấp nhận được.

Phương pháp Secant: Áp dụng ma trận độ cứng cát tuyến thay vì tiếp tuyến. Có nhiều công thức khác nhau để xác định ma trận cát tuyến; trong nghiên cứu này, công thức xấp xỉ theo Broyden [13] được sử dụng, với biểu thức như sau:

$$K_s^i = K_s^{i-1} + \frac{\Delta R - K_s^{i-1}\Delta u}{\|\Delta u\|^2}\Delta u^T, \quad (2)$$

trong đó:

$$R(u^i) = P(u^i) - f, \quad (3)$$

$$\Delta R = R(u^i) - R(u^{i-1}), \quad (4)$$

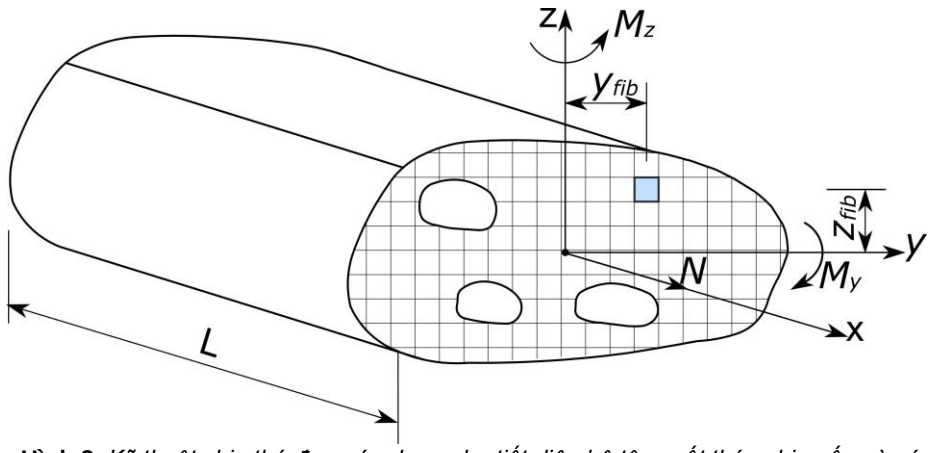
$$\Delta u = u^i - u^{i-1}. \quad (5)$$

3.2 Phương pháp chia thớ và phương pháp lấy tích phân

Phương pháp chia thớ [10-12] là kỹ thuật phổ biến để xác định trạng thái ứng suất biến dạng của tiết diện BTCT chịu nén và uốn. Kỹ thuật này chia nhỏ tiết diện thành nhiều phần nhỏ (thớ), mỗi thớ được mô tả bởi diện tích, vị trí và vật liệu cấu tạo như Hình 2. Sau đó, ứng suất và biến dạng của từng thớ được tính toán riêng biệt và tổng hợp lại để xác định trạng thái ứng suất biến dạng của toàn bộ mặt cắt.

Trong trường hợp tổng quát tiết diện BTCT chịu nén và uốn bao gồm các giá trị nội lực dọc trục N và các mômen uốn M_y và M_z quanh các y và z tác dụng lên mặt cắt. Với các nội lực như vậy, mặt cắt ngang được giả thiết vẫn phẳng sau biến dạng theo giả thiết Bernoulli. Biến dạng mặt cắt tương ứng với các nội lực trên bao gồm biến dạng dọc trục ε_x theo phương x và các độ cong κ_y và κ_z quanh y và z tương ứng được xác định theo công thức sau:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x + \kappa_y z_i - \kappa_z y_i, \quad (6)$$



Hình 2. *Kỹ thuật chia thớ được áp dụng cho tiết diện bê tông cốt thép chịu uốn và nén dọc đồng thời*

Việc lấy tích phân số để xác định nội lực của tiết diện BTCT thường được thực hiện theo phương pháp gần đúng. Hai phương pháp phổ biến là phương pháp hình chữ nhật và phương pháp cầu phương Gauss thường được sử dụng. Bài báo này sử dụng phương pháp hình chữ nhật để lấy tích phân xác định nội lực do tính ổn định và tốc độ tính toán nhanh hơn so với phương pháp cầu phương Gauss [12].

Ma trận độ cứng của tiết diện BTCT được xác định như sau:

$$k_s = \int_A E_t \begin{bmatrix} 1 & z & -y \\ z & z^2 & -yz \\ -y & -yz & y^2 \end{bmatrix} dA \approx \sum_{i=1}^{N_{fib}} E_{ti} \begin{bmatrix} 1 & z_i & -y_i \\ z_i & z_i^2 & -y_i z_i \\ -y_i & -y_i z_i & z_i^2 \end{bmatrix} A_i, \quad (7)$$

trong đó: E_t được xác định từ mối quan hệ ứng suất và biến dạng của vật liệu;

A là diện tích của mặt cắt tiết diện;

N_{fib} là tổng số điểm lấy tích phân.

Giá trị môđun E_t phụ thuộc vào thuật toán giải được áp dụng. Trong phương pháp NR, E_t được cập nhật liên tục tại mỗi vòng lặp như một môđun tiếp tuyến. Phương pháp MoNR chỉ cập nhật E_t tại vòng lặp đầu tiên. Trong khi đó, phương pháp Secant sử dụng môđun đàn hồi ban đầu không đổi trong suốt quá trình tính toán.

4. Giải thuật

Bước 1: Tiết diện được phân chia thành các thớ nhỏ, mỗi thớ được xác định bởi diện tích, loại vật liệu BTCT và vị trí hình học.

Bước 2: Khai báo mô hình vật liệu và kích thước tiết diện

Bước 3: Giá trị ban đầu của biến dạng dọc trục ε_x và độ cong uốn κ_y, κ_z được giả định, đại diện cho trạng thái biến dạng ban đầu của tiết diện.

Bước 4: Biến dạng tại từng thớ được tính toán dựa trên giả thiết tiết diện phẳng, sử dụng vị trí tương đối của các thớ so với trục trọng tâm của tiết diện quy đổi.

Bước 5: Ứng suất của mỗi thớ được xác định thông qua mô hình vật liệu phi tuyến tương ứng với giá trị biến dạng thu được ở Bước 4.

Bước 6: Nội lực (lực dọc và mô men uốn) được tính bằng cách tích phân ứng suất các thớ theo tích phân số – quy tắc hình chữ nhật.

Bước 7: Lực dư (không cân bằng) được xác định bằng cách so sánh giữa nội lực tính được từ phân tích tiết diện và tải trọng bên ngoài yêu cầu.

Bước 8: Quá trình lặp được xem là hội tụ nếu chuẩn Euclid của lực dư nhỏ hơn ngưỡng sai số cho phép ví dụ 10^{-5}, hoặc khi biến dạng bê tông chịu nén hoặc cốt thép chịu kéo vượt quá giá trị giới hạn, cho thấy tải trọng giới hạn đã đạt.

Bước 9: Nếu chưa hội tụ, trường biến dạng được cập nhật theo một trong ba phương pháp số:

NR: Ma trận độ cứng tiếp tuyến (Jacobian) được cập nhật ở mỗi vòng lặp.

MoNR: Ma trận độ cứng chỉ cập nhật tại vòng lặp đầu tiên của mỗi bước tải và giữ nguyên ở các vòng lặp tiếp theo.

Secant: Sử dụng ma trận cát tuyến, được cập nhật theo công thức gần đúng như phương pháp Broyden đã nêu ở công thức (2).

Bước 10: Khi đạt được hội tụ, thuật toán tiếp tục đến bước tải kế tiếp. Quá trình lặp tiếp diễn cho đến khi đạt điều kiện ở bước 8.

5. Ví dụ khảo sát

Trong bước tiếp theo, một chương trình tính toán được xây dựng bằng MATLAB để khảo sát hiệu quả của các phương pháp giải hệ phi tuyến thông qua một ví dụ minh họa. Nghiên cứu tập trung so sánh tốc độ hội tụ giữa các phương pháp số, đồng thời đối chiếu kết quả thu được với phương pháp nội lực giới hạn theo [1].

Toàn bộ quá trình tính toán được thực hiện trên máy tính cá nhân sử dụng bộ vi xử lý Intel(R) Core(TM) i5-8265U CPU @ 1.60GHz (8 lõi xử lý), tốc độ xung nhịp ~1.8GHz, bộ nhớ RAM 16 GB và ổ cứng dung lượng 500 GB. Thời gian tính toán được ghi nhận theo đơn vị giây.

5.1 Mô tả chung về ví dụ

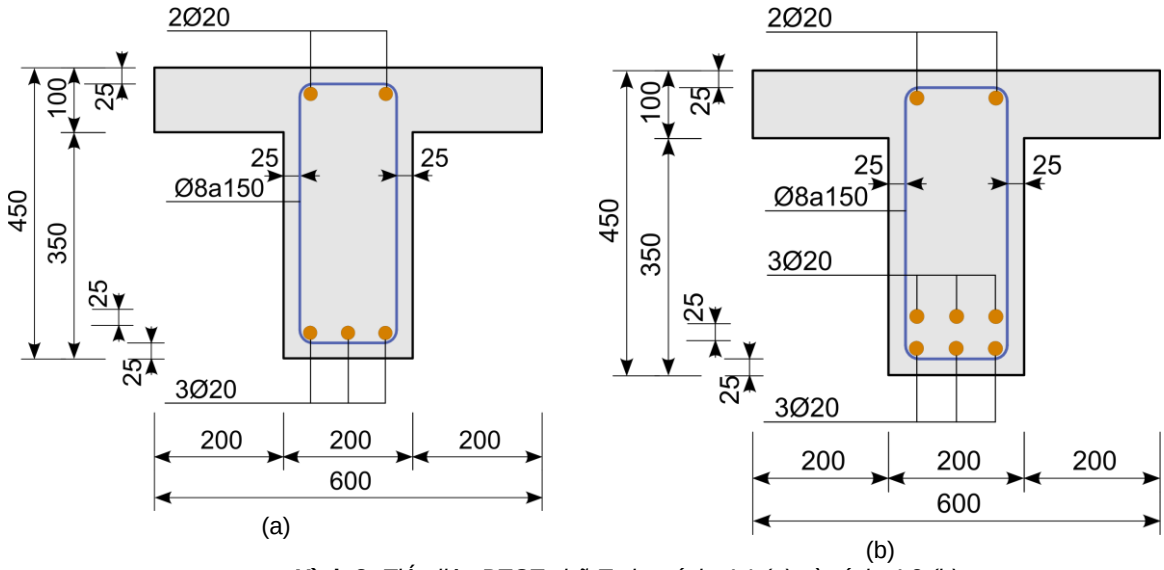
Hai ví dụ sau cùng xét một tiết diện dầm BTCT hình chữ T chịu uốn với thớ dưới chịu kéo, trong đó các thông số vật liệu được giữ không đổi. Tuy nhiên khác nhau về hàm lượng và phân bố cốt thép chịu kéo, dẫn đến sự khác biệt trong vị trí trục trung hòa và cách xác định tiết diện chịu uốn theo phương pháp nội lực giới hạn.

Bê tông: Loại B15, với cường độ chịu nén tính toán R_b = 8.5 MPa;

Cốt thép: Thép CB400-V, với cường độ chịu kéo và chịu nén tính toán là R_s = R_{sc} = 350 MPa.

Ví dụ 4.1 (Hình 3a): Do trục trung hòa nằm trong phần cánh dầm, nên tiết diện được quy đổi thành tiết diện chữ nhật, với kích thước xác định từ hình học của tiết diện chữ T ban đầu.

Ví dụ 4.2 (Hình 3b): Trong trường hợp này, trục trung hòa nằm trong phần sườn dầm, do đó theo phương pháp nội lực giới hạn [1], tiết diện được tính như tiết diện chữ T.



Hình 3. *Tiết diện BTCT chữ T cho ví dụ 4.1 (a) và ví dụ 4.2 (b)*

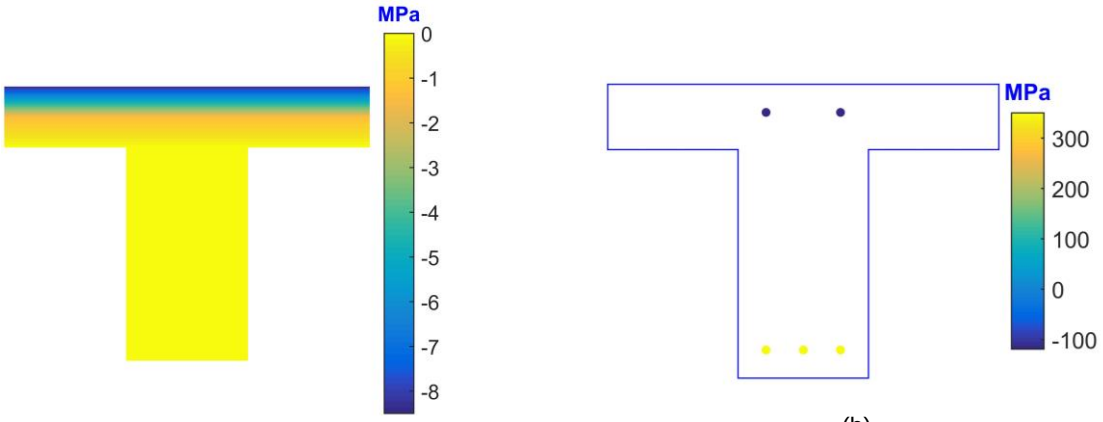
5.2 Kết quả tính toán mô men uốn giới hạn

Bảng 1 trình bày kết quả so sánh giá trị mô men uốn giới hạn M_u thu được từ phương pháp nội lực giới hạn theo [1] và ba phương pháp số dựa trên mô hình biến dạng phi tuyến, trong hai ví dụ tiết diện điển hình. Các phương pháp số được áp dụng bao gồm NR, MoNR, và Secant. Kết quả cho thấy cả ba thuật toán đều hội tụ đến giá trị gần như tương đương tại mỗi ví dụ, với sai khác giữa các thuật toán không vượt quá 0.05%, cho thấy tính nhất quán của mô hình phân tích phi tuyến độc lập với lựa chọn thuật toán.

Kết quả trình bày trong Bảng 1 cho thấy mô men uốn giới hạn thu được từ cả ba thuật toán số đều cao hơn so với kết quả tính theo phương pháp nội lực giới hạn trong cả hai ví dụ khảo sát. Cụ thể, trong ví dụ 4.1, giá trị mô men từ các thuật toán số dao động từ 124.56 đến 124.60 kNm, cao hơn khoảng 3.73–3.75% so với giá trị 120.09 kNm từ phương pháp nội lực giới hạn. Tương tự, ở ví dụ 4.2, kết quả thu được là khoảng 223.95–224.00 kNm, cao hơn 3.24–3.27% so với giá trị 216.89 kNm theo phương pháp truyền thống. Sự sai lệch này phản ánh khả năng của mô hình phân tích phi tuyến trong việc khai thác hiệu quả hơn khả năng chịu lực của vật liệu và mô tả phân bố nội lực thực tế trong tiết diện, đặc biệt ở vùng làm việc gần trạng thái giới hạn.

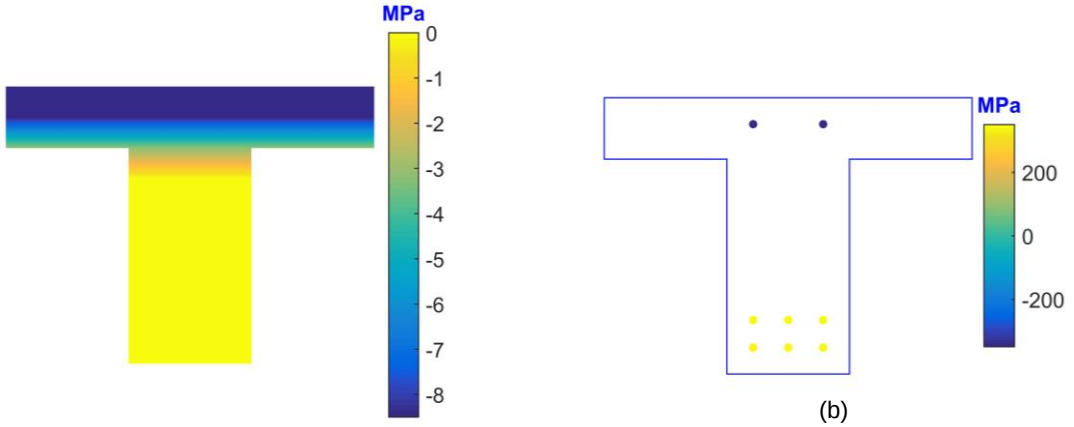
Bảng 1. *So sánh mô men uốn giới hạn giữa phương pháp nội lực giới hạn và phương pháp số*

Phương pháp	Ví dụ 4.1 (kNm)	Ví dụ 4.2 (kNm)
Nội lực giới hạn [1]	120.09	216.89
NR	124.60	224
MoNR	124.59	223.98
Secant	124.56	223.95



(a) (b)

Hình 4. *Sự phân bố ứng suất pháp trong bê tông (a) và cốt thép (b) ở ví dụ 4.1 ứng với M_u*



(a) (b)

Hình 5. *Sự phân bố ứng suất pháp trong bê tông (a) và cốt thép (b) ở ví dụ 4.2 ứng với M_u*

Phân bố ứng suất pháp trong bê tông và cốt thép tại trạng thái giới hạn uốn (M_u) được trình bày lần lượt trong Hình 4 và Hình 5, tương ứng với ví dụ 4.1 và 4.2. Trong cả hai ví dụ, ứng suất bê tông đạt tới cường độ chịu nén tính toán là 8.5 MPa, và cốt thép kéo đạt giới hạn chảy dẻo 350 MPa. Cốt thép chịu nén trong ví dụ 4.1 đạt ứng suất cực đại -119.03 MPa, trong khi ở ví dụ 4.2, cốt thép nén đạt tới giới hạn chảy nén -350 MPa. Ngoài ra, vị trí trục trung hòa xác định từ mô hình phân tích phi tuyến cho kết quả phù hợp với dự đoán theo phương pháp nội lực giới hạn trong TCVN 5574:2018: trục trung hòa nằm trong vùng cánh tiết diện chữ T ở ví dụ 4.1, và nằm trong vùng bụng ở ví dụ 4.2.

5.3 So sánh về hiệu suất hội tụ của các phương pháp số

Hiệu suất tính toán của ba phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến – NR, MoNR, và Secant – được đánh giá thông qua ba chỉ tiêu chính: thời gian hội tụ tổng cộng, số vòng lặp cần thiết, và thời gian trung bình mỗi vòng lặp tại các mức tải từ 0,2 M_u đến 1,0 M_u. Kết quả được trình bày trong Bảng 2 đến Bảng 5 và minh họa trực quan bằng biểu đồ logarit ở Hình 6.

a) Hiệu suất hội tụ trong ví dụ 4.1

Bảng 2 trình bày thời gian hội tụ tổng cộng và số vòng lặp của ba phương pháp số tại các mức tải khác nhau. Kết quả cho thấy phương pháp NR giữ vững hiệu suất cao khi chỉ cần 3–6 vòng lặp, với thời gian tính toán tăng nhẹ từ 0.047 s đến 0.106 s khi tải tăng từ 0.2 đến 1.0 M_u. Điều này thể hiện độ ổn định và khả năng hội tụ tốt của phương pháp NR, đặc biệt ngay cả ở tải giới hạn.

Phương pháp Secant tuy cần nhiều vòng lặp hơn (7–18 vòng) nhưng lại duy trì thời gian tổng thể khá thấp, dao động từ 0.08 s đến 0.243 s, thậm chí ở mức tải 1.0 M_u chỉ mất 0.22 s. Điều này chứng tỏ chi phí mỗi vòng lặp của phương pháp này thấp và ổn định, mặc dù cấu trúc thuật toán không sử dụng đạo hàm chính xác.

Ngược lại, MoNR chỉ cho thấy hiệu quả trong các mức tải thấp (0.057–0.077 s với 5 vòng lặp). Khi tải tiến dần đến vùng phi tuyến mạnh, số vòng

lặp của MoNR tăng đột biến lên 235 vòng tại 0.96 M_u và 2000 vòng tại 1.0 M_u, kéo theo thời gian tính toán tăng vọt lên 3.276 s và 29.1 s tương ứng. Dữ liệu này cho thấy MoNR hoàn toàn mất kiểm soát về hiệu suất trong điều kiện phi tuyến mạnh.

Bảng 2. *Thời gian và số vòng lặp các phương pháp số tại các mức tải ở ví dụ 4.1*

Tải mức M/M_u	NR (s)	Số vòng	MoNR (s)	Số vòng	Secant (s)	Số vòng
0.2	0.047	3	0.057	5	0.097	7
0.4	0.049	3	0.077	5	0.082	7
0.6	0.055	3	0.077	5	0.086	7
0.8	0.058	4	0.082	6	0.09	8
0.9	0.075	5	0.11	10	0.105	10
0.96	0.098	6	3.276	235	0.243	16
1	0.106	6	29.1	2000	0.22	18

Phân tích Bảng 3 cho thấy phương pháp Newton-Raphson (NR) duy trì thời gian tính toán mỗi vòng lặp khá ổn định, dao động trong khoảng 0.016–0.018 s. Phương pháp Secant cũng thể hiện hiệu suất ổn định, với thời gian mỗi vòng lặp thấp hơn, trong khoảng 0.011–0.014 s. Đáng chú ý, MoNR lại không cho thấy lợi thế chi phí như thường kỳ vọng. Thời gian mỗi vòng lặp của MoNR dao động từ 0.011–0.015 s, gần tương đương hoặc cao hơn Secant và không chênh lệch đáng kể so với NR. Tại mức tải cực hạn 1.0 Mu, MoNR chỉ cần 0.015 s cho mỗi vòng lặp – thấp hơn NR 0.003 s – nhưng phải thực hiện tới 2000 vòng, so với chỉ 6 vòng của NR. Điều này dẫn đến chênh lệch lớn về tổng thời gian tính toán và tiêu tốn tài nguyên xử lý.

Bảng 3. *Thời gian trung bình mỗi vòng lặp (s) các phương pháp số ở ví dụ 4.1*

Tải mức M_u	NR (s)	MoNR (s)	Secant (s)
0.2	0.016	0.011	0.014
0.4	0.016	0.015	0.012
0.6	0.018	0.015	0.012
0.8	0.014	0.014	0.011
0.9	0.015	0.011	0.01
0.96	0.016	0.014	0.015
1	0.018	0.015	0.012

b) Hiệu suất hội tụ trong ví dụ 4.2

Kết quả từ Bảng 4 cho thấy phương pháp NR có số vòng lặp thấp và ổn định trong suốt quá trình tải, từ 2 vòng ở các mức tải thấp đến 24 vòng tại mức tải giới hạn 1.0 M_u. Thời gian tính toán tương ứng tăng đều từ 0.027 s đến 1.009 s. Điều này phản ánh đặc trưng hội tụ nhanh và ổn định của NR, đặc biệt trong vùng làm việc phi tuyến mạnh.

Bảng 4. *Thời gian và số vòng lặp các phương pháp số tại các mức tải ở ví dụ 4.2*

Tải mức M/M_u	NR (s)	Số vòng	MoNR (s)	Số vòng	Secant (s)	Số vòng
0.2	0.027	2	0.016	2	0.067	7
0.4	0.027	2	0.018	2	0.078	7
0.6	0.029	2	0.028	2	0.082	7
0.8	0.032	2	0.018	2	0.074	7
0.9	0.047	3	0.155	13	0.111	7
0.96	0.164	9	0.229	16	0.083	7
1	1.009	24	21.002	1506	0.339	22

MoNR cho thấy hiệu quả ban đầu khá tốt tại các mức tải từ 0.2 đến 0.8 M_u, với chỉ 2 vòng lặp và thời gian tính toán dao động từ 0.016 s đến 0.028 s. Tuy nhiên, từ mức tải 0.9 M_u trở đi, số vòng lặp tăng mạnh: 13 vòng tại 0.9 M_u, 16 vòng tại 0.96 M_u và đạt tới 1506 vòng tại mức tải cực hạn 1.0 M_u. Thời gian tính toán tương ứng cũng tăng đột biến từ 0.155 s lên tới 21.002 s – cao gấp khoảng 21 lần NR và 60 lần Secant tại cùng mức tải. Điều này cho thấy MoNR mất ưu thế hoàn toàn khi tiến vào vùng phi tuyến mạnh.

Phương pháp Secant cần số vòng lặp cao hơn đáng kể trong suốt quá trình (7–22 vòng), tuy nhiên thời gian tính toán vẫn duy trì ở mức hợp lý: từ 0.067 s đến 0.339 s. Đặc biệt tại mức tải giới hạn 1.0 M_u, Secant chỉ mất 0.339 s trong khi MoNR mất đến 21.002 s, chứng tỏ Secant có khả năng tiết kiệm thời gian đáng kể dù số vòng lặp lớn**.**

Bảng 5 cho thấy thời gian trung bình mỗi vòng lặp của NR dao động trong khoảng 0.014–0.042 s. Đáng chú ý là tại mức tải 1.0 M_u, thời gian mỗi vòng tăng vọt lên 0.042 s, cho thấy chi phí mỗi vòng lặp trong NR có xu hướng tăng tại tải cao do việc cập nhật đạo hàm chính xác.

MoNR mặc dù có thời gian mỗi vòng lặp tương đối thấp và ổn định (0.008–0.014 s), lại không thể bù đắp được sự tăng mạnh về số vòng lặp, đặc biệt tại 1.0 M_u. Tại đây, mỗi vòng chỉ mất 0.014 s, nhưng với 1506 vòng thời gian cộng dồn vẫn quá lớn.

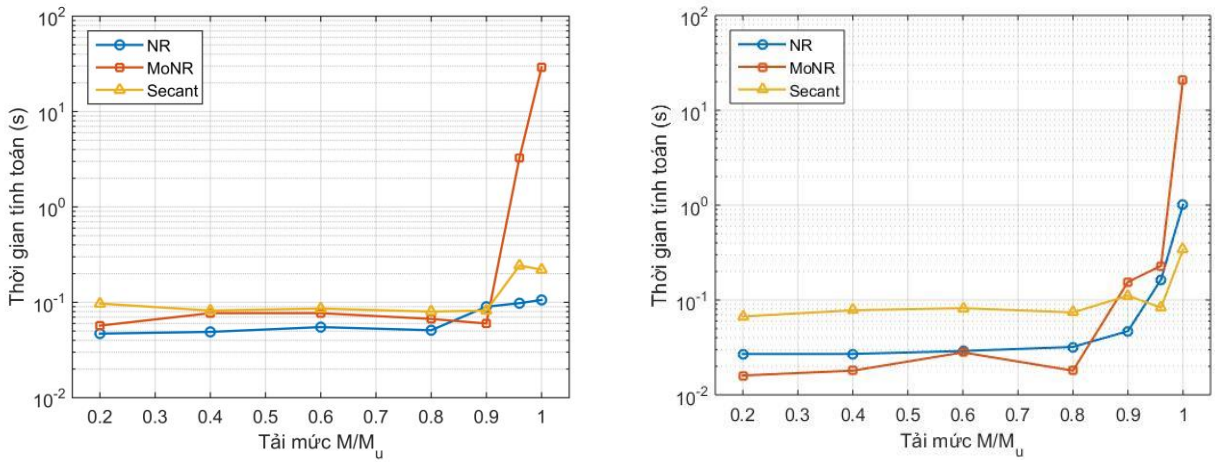
Bảng 5. *Thời gian trung bình mỗi vòng lặp (s) các phương pháp số ở ví dụ 4.2*

Tải mức M_u	NR (s)	MoNR (s)	Secant (s)
0.2	0.014	0.008	0.01
0.4	0.014	0.009	0.011
0.6	0.015	0.014	0.012
0.8	0.016	0.009	0.011
0.9	0.016	0.012	0.016
0.96	0.018	0.014	0.012
1	0.042	0.014	0.015

Secant giữ được thời gian mỗi vòng lặp ổn định nhất (dao động quanh 0.010–0.016 s), và không tăng đột biến kể cả khi tải tiến đến giới hạn, điều này giúp phương pháp này giữ được hiệu suất ổn định hơn MoNR.

c) Biểu đồ minh họa logarit

Biểu đồ log-log trong hình 6 trực quan hóa sự khác biệt rõ rệt giữa các phương pháp. Đường biểu diễn của MoNR tăng vọt từ mức tải 0,9 M_u trở đi, đặc biệt tại điểm 1.0 M_u – nơi sai khác về thời gian giữa MoNR và các phương pháp còn lại đạt tới hai bậc logarit. Ngược lại, NR và Secant thể hiện tốc độ hội tụ ổn định, thay đổi đều theo mức tải.



Hình 6. *Thời gian tính toán tổng cộng (s) ứng với các tải mức M/M_u của ba phương pháp số – ví dụ 4.1 (a) và ví dụ 4.2 (b)*

6. Kết luận

Nghiên cứu đã triển khai ba phương pháp lặp phổ biến – NR, MoNR và Secant – trong phân tích phi tuyến tiết diện BTCT chịu uốn thuần túy, theo định hướng của TCVN 5574:2018. Mô hình chia thớ kết hợp với biểu đồ ứng suất-biến dạng hai đoạn thẳng được sử dụng để mô tả vật liệu phi tuyến. Kết quả cho thấy cả ba phương pháp đều hội tụ ổn định và cho giá trị mô men uốn giới hạn gần như tương đương (sai lệch < 0,05%), khẳng định tính nhất quán và độ tin cậy của mô hình.

Khi đánh giá hiệu suất tính toán thông qua ba chỉ tiêu – tổng thời gian hội tụ, số vòng lặp và thời gian trung bình mỗi vòng – sự khác biệt đáng kể giữa các phương pháp đã được xác lập. Phương pháp NR thể hiện đặc tính hội tụ nhanh và ổn định, với số vòng lặp thấp và thời gian tính toán ngắn trong toàn bộ dải tải. Trong khi đó, phương pháp Secant dù cần nhiều vòng lặp hơn, nhưng duy trì thời gian mỗi vòng thấp và ổn định, giúp tổng thời gian vẫn cạnh tranh.

Ngược lại, MoNR chỉ hiệu quả tại tải thấp và nhanh chóng mất kiểm soát trong vùng phi tuyến mạnh. Tại tải giới hạn (1.0 M_u), số vòng lặp tăng vọt lên 2000 (ví dụ 4.1) và 1506 (ví dụ 4.2), khiến tổng thời gian lần lượt là 29.1 s và 21.0 s – cao gấp hàng chục lần so với NR và Secant. Dù thời gian mỗi vòng của MoNR không lớn, chi phí tính toán cộng dồn trở nên không khả thi trong bối cảnh thực hành.

Biểu đồ logarit tại Hình 6 trực quan hóa rõ sự khác biệt về hiệu suất, đặc biệt ở tải giới hạn, nơi đường biểu diễn của MoNR vượt xa hai phương pháp còn lại đến hai bậc logarit. Từ đó, có thể kết luận rằng Newton-Raphson là lựa chọn ưu tiên khi yêu cầu tốc độ và độ ổn định cao; còn Secant là phương án hiệu quả về chi phí, đặc biệt hữu ích khi cần giới hạn số phép tính đạo hàm.

Ngoài ra, so sánh giữa mô hình số và phương pháp nội lực giới hạn theo TCVN 5574:2018 cho thấy sai lệch mô men uốn giới hạn chỉ khoảng 3.27–3.75%. Sai lệch nhỏ này phản ánh rõ đóng góp của vùng biến dạng dẻo trong mô hình phi tuyến, đồng thời xác nhận tính hợp lý và hiệu quả thực tiễn của phương pháp nội lực giới hạn, đặc biệt với các tiết diện chữ T trong thiết kế công trình.

Lời cảm ơn:

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Thủ Dầu Một trong đề tài mã số DT.25.1-101.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] TCVN 5574-2018, *Thiết kế kết cấu bê tông và bê tông cốt thép - Tiêu chuẩn thiết kế*. Viện Khoa học công nghệ xây dựng - Bộ Xây dựng.

[2] Lê Minh Long (2017), *Một số điểm mới trong dự thảo TCVN 5574:2017*, Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, số 2, tr. 55-51.

[3] Nguyễn Ngọc Bá (2019), *Giới hạn hàm lượng cốt thép trong kết cấu BTCT chịu uốn theo TCVN 5574: 2018*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, số 1, tr. 22-28.

[4] Võ Thành Lương (2019), *Tính toán tiết diện dầm bê tông cốt thép chịu uốn phẳng theo quan điểm biến dạng*. Journal of Science and Technique-Section on Special Construction Engineering, số 2, tr. 88-96.

[5] Nguyễn Hữu Anh Tuấn (2020), *Khảo sát ứng xử uốn của dầm bê tông cốt thép thông qua biểu đồ mô men-độ cong tính theo TCVN 5574: 2018*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, số 2, tr 62-69.

[6] Nguyễn Ngọc Linh, Nguyễn Ngọc Tân, Nguyễn Văn Quang, Phan Quang Minh (2020), *Nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm xác định mô men uốn giới hạn của cấu kiện dầm BTCT theo mô hình biến dạng phi tuyến của bê tông*. Bản B của Tạp chí Khoa học và Công nghệ Việt Nam, tập 62, số 1, *tr 36-41*.

[7] Trần Ngọc Long, Phan Văn Phúc, Nguyễn Trọng Hà (2020), *Tính toán dầm bê tông cốt thép chịu uốn xiên sử dụng mô hình phi tuyến*. Tạp chí KHCN Xây dựng, số 2, tr 23-35.

[8] Nguyen, T. D., Pham, V. A., Tran-Thi, K. H. (2022,), *Investigating the ultimate bending strength of reinforced concrete section under different non-linear constitutive models according to the design standard TCVN 5574–2018*. In 2022 7th National Scientific Conference on Applying New Technology in Green Buildings (ATiGB) IEEE, November, tr. 150-155.

[9] Cao Văn Tuấn, Trương Mỹ Phẩm (2023), *Phân tích ứng xử của dầm bê tông cốt thép tiết diện chữ nhật chịu uốn phẳng theo mô hình biến dạng phi tuyến vật liệu*. Tạp chí Xây dựng, số 6, tr. 110-115.

[10] Spacone, E., Filippou, F. C., Taucer, F. F. (1996), *Fibre beam–column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation*. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, tập 25, số 7, tr. 711-725.

[11] Spacone, E., Filippou, F. C., Taucer, F. F. (1996), *Fibre beam–column model for non-linear analysis of R/C frames: part II. Applications*. Earthquake engineering & structural dynamics, tập 25, số 7, tr. 727-742.

[12] Kostic, S. M., Filippou, F. C. (2012). *Section discretization of fiber beam-column elements for cyclic inelastic response*. Journal of Structural Engineering, tập 138, số 5, tr. 592-601.

[13] De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J., & Verhoosel, C. V. (2012). *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons.