



TẠP CHÍ XÂY DỰNG - eISSN 3030-4482

Mô phỏng ứng xử uốn của dầm chịu tác dụng tải trọng cơ - nhiệt bằng mô hình lưới

Numerical simulation of the flexural response of beams under thermo - mechanical loading using a lattice model

THS.NCS Nguyễn Lê Đạt¹, PGS.TS Phạm Đức Thọ^{2,*}, PGS.TS Đặng Trung Thành², PGS.TS Vũ Minh Ngạn²

¹Tập đoàn Công nghiệp - Viễn thông Quân đội

²Nhóm nghiên cứu GECS, Trường Đại học Mở - Địa chất

*Email: phamductho@humg.edu.vn

THÔNG TIN BÀI BÁO

Chuyên mục: Khoa học công nghệ

Ngày nhận bài: 25/9/2026

Ngày sửa bài: 01/10/2026

Ngày chấp nhận đăng: 16/10/2026

Ngày xuất bản Online: 23/10/2026

Tác giả liên hệ:

Email: phamductho@humg.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo trình bày mô hình lưới cơ - nhiệt nhằm phân tích ứng xử uốn và sự độ mở rộng vết nứt của dầm bê tông chịu uốn và chịu nhiệt độ cao. Mô hình lưới dựa trên Delaunay - Voronoi được phát triển trong mã nguồn mở OOFEM, phần tử cơ học mô tả sự suy giảm độ cứng và mềm hóa, còn phần tử nhiệt xét sự phụ thuộc của hệ số dẫn nhiệt và nhiệt dung riêng vào nhiệt độ. Dầm có kích thước (100×100×400)mm được phân tích theo giả thiết ứng suất phẳng và chịu uốn ba điểm với tải trọng tác dụng được kiểm soát bằng chuyển vị. Các đường cong lực - chuyển vị ở 20°C, 250°C và 400°C được so sánh với kết quả thực nghiệm đã được công bố cho thấy mô hình hoàn toàn có thể mô phỏng ứng xử của dầm chịu tác động đồng thời tải trọng cơ - nhiệt. Nghiên cứu cũng được mở rộng để dự báo ứng xử của dầm tại các nhiệt độ 600°C, 800°C và 1.000°C.

Từ khóa: Dầm chịu uốn ba điểm; nhiệt độ cao; mô hình lưới; mô hình cơ - nhiệt.

ABSTRACT

This paper presents a thermo - mechanical lattice model for analysing the flexural response and crack opening of concrete beams subjected to bending and elevated temperatures. The model employs a Delaunay - Voronoi discretisation and is

implemented in the open - source OOFEM framework. Mechanical elements describe stiffness degradation and softening, while thermal elements account for temperature - dependent thermal conductivity and specific heat capacity. A beam measuring (100×100×400)mm is analysed under plane - stress conditions and subjected to displacement - controlled three - point bending. Comparisons of the load - displacement curves at 20°C, 250°C and 400°C with published experimental results demonstrate the model's ability to reproduce the beam response under combined mechanical and thermal loading. The study is further extended to predict the beam response at 600°C, 800°C and 1,000°C.

Keywords: Beam three - point bending test; elevated temperatures; lattice model; thermo - mechanical model.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong điều kiện hỏa hoạn, bê tông chịu tác động đồng thời của nhiệt độ cao, tải trọng và sự kiểm chế biến dạng từ các bộ phận kết cấu lân cận. Sự kết hợp này làm phát sinh ứng suất nhiệt, thúc đẩy quá trình nứt và suy giảm các đặc trưng cơ học của vật liệu. Đối với vỏ hầm giao thông, trường nhiệt không đồng đều theo chiều dày kết cấu, cùng với trạng thái chịu lực ban đầu, có thể làm gia tăng mức độ hư hỏng và ảnh hưởng đến khả năng duy trì chức năng chịu lực trong quá trình cháy. Vì vậy, xây dựng mô hình cơ - nhiệt có khả năng mô tả sự tương tác giữa truyền nhiệt, biến dạng và hư hỏng của bê tông là cơ sở cần thiết cho việc phân tích ứng xử và đánh giá an toàn kết cấu chịu hỏa hoạn.

Bản chất phức tạp của ứng xử cơ - nhiệt bắt nguồn từ cấu trúc đa pha và không đồng nhất của bê tông. Ở cấp độ trung bình, vật liệu có thể được mô tả thông qua cốt liệu, nền đá xi măng và vùng chuyển tiếp giữa hai pha (ITZ). Sự khác biệt về độ cứng và đặc trưng giãn nở nhiệt của các thành phần tạo ra tính không tương thích biến dạng, dẫn đến tập trung ứng suất và hình thành vi nứt. Đồng thời, sự mất nước và các biến đổi hóa-lý trong nền đá xi măng làm thay đổi cấu trúc vật liệu và suy giảm liên kết giữa các pha [7, 8].

Trên cơ sở tiếp cận đa cấp độ, Menou và cộng sự [1] đã kết hợp mô hình bê tông số đa pha Digital Concrete với mô hình hư hỏng MODEV trên nền tảng phần tử hữu hạn SYMPHONIE. Trong cách tiếp cận này, hư hỏng do biến dạng nhiệt bị kiểm chế ở cấp độ vi mô và vĩ mô được phân biệt với thành phần hư hỏng do các biến đổi vật lý và hóa học của vật liệu. Việc đối chiếu mô phỏng với thí nghiệm trên các vật liệu gốc xi măng đã làm rõ vai trò của chênh lệch giãn nở nhiệt giữa các pha đối với sự suy giảm tính chất cơ học. Nghiên cứu cung cấp cơ sở quan trọng để giải thích hư hỏng nhiệt gây biến đổi cấu trúc vật liệu, đồng thời cho thấy cần kết hợp mô tả cấu trúc đa pha với các quan hệ hư hỏng phù hợp trong phân tích cơ - nhiệt.

Theo hướng mô hình hóa ở cấp độ trung bình, Grassl và Pearce [2] đã mô tả biến dạng nhiệt quá độ của bê tông chịu nén và gia nhiệt thông qua sự không tương thích giãn nở nhiệt giữa cốt liệu, pha nền và vùng chuyển tiếp. Tiếp đó, Nguyen và cộng sự [3] nghiên cứu trực tiếp sự thay đổi hệ số dẫn nhiệt do tác động cơ - nhiệt bằng mô hình lưới, trong đó hệ số dẫn nhiệt của phần tử bị nứt được liên hệ với biến hư hỏng thông qua độ mở vết nứt. Phạm và cộng sự [4] tiếp tục sử dụng mô hình lưới cơ - nhiệt ở cấp độ trung bình để mô tả biến dạng nhiệt quá độ và dự báo sự suy giảm các đặc trưng vật liệu ở nhiệt độ đến 800°C. Các nghiên cứu này xác lập cơ sở cho việc phân tích đồng thời tính không đồng nhất, quá trình nứt và sự biến đổi đặc trưng cơ - nhiệt của bê tông.

Kế thừa các cơ sở nêu trên, bài báo trình bày mô hình lưới cơ - nhiệt phi tuyến sử dụng cặp lưới đối ngẫu Voronoi - Delaunay và phát triển trong phần mềm mã nguồn mở

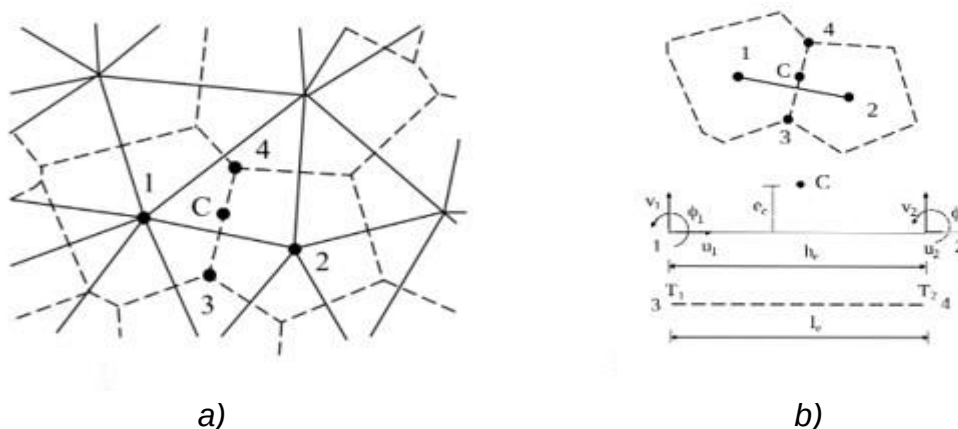
OOFEM [5]. Các phần tử truyền nhiệt được bố trí dọc theo cạnh Voronoi, trong khi các phần tử cơ học được thiết lập trên cạnh Delaunay. Sự suy giảm độ cứng và quá trình phát triển nứt được mô tả bằng quan hệ hư hỏng dựa trên biến dạng, kế thừa mô hình Mazars, kết hợp quy luật mềm hóa theo năng lượng phá hủy. Bài toán nhiệt xét sự phụ thuộc của hệ số dẫn nhiệt và nhiệt dung riêng vào nhiệt độ; ảnh hưởng của hư hỏng được đưa vào hệ số dẫn nhiệt tương đương thông qua độ mở vết nứt, hệ số dẫn nhiệt của không khí trong khe nứt và có xem xét ảnh hưởng của hư hỏng nhiệt-hóa. Cách thiết lập này cho phép cập nhật tương hỗ trạng thái cơ học và trường nhiệt trong quá trình tính toán.

Mô hình xây dựng được áp dụng vào nghiên cứu ứng xử uốn của dầm bê tông được mô tả bằng vật liệu không đồng nhất. Kết quả mô phỏng số được so sánh với nghiên cứu thực nghiệm của Menou và cộng sự [1] và dự báo ứng xử của dầm chịu uốn ở nhiệt độ 600°C, 800°C và 1.000°C.

2. MÔ HÌNH LƯỚI CƠ NHIỆT

2.1. Rời rạc hóa và phần tử mô hình

Miền nghiên cứu được rời rạc bằng các điểm phân bố không đều, từ đó xây dựng tam giác Delaunay và đa giác Voronoi. Các phần tử cơ học nằm trên cạnh Delaunay, các phần tử dẫn nhiệt nằm trên mạng Voronoi đối ngẫu. Hình 1 minh họa quan hệ hình học giữa hai mạng và các bậc tự do của phần tử. Thông tin nhiệt độ và trạng thái nứt được chuyển giữa các phần tử tương ứng thông qua cấu trúc đối ngẫu [5, 6].



Hình 1. Cặp lưới đối ngẫu Delaunay - Voronoi và sơ đồ phần tử cơ học, phần tử nhiệt; hình kế thừa từ bản thảo, tham khảo [5, 6]

2.2. Dẫn nhiệt và ảnh hưởng của độ mở rộng nứt

Khi không xét nguồn nhiệt thể tích, phương trình bảo toàn năng lượng có dạng:

$$\rho C(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla[\lambda(T) \nabla T] = 0 \quad (1)$$

Trong đó: T là nhiệt độ; t là thời gian; ρ là khối lượng riêng (kg/m^3); C là nhiệt dung riêng (J/(kgK)); λ là hệ số dẫn nhiệt (W/(mK)). Mô hình sử dụng xấp xỉ tuyến tính:

$$\lambda(T) = \lambda_0[1 + A_\lambda(T - T_0)], \quad C(T) = C_0[1 + A_C(T - T_0)] \quad (2)$$

Các hệ số λ_0 và C_0 là giá trị tại nhiệt độ tham chiếu T_0 ; A_λ và A_C có đơn vị K^{-1} . Đây là quan hệ đầu vào của mô hình, không phải mô tả đầy đủ các quá trình mất nước và chuyển pha. Khi áp dụng phải bảo đảm $\lambda(T) > 0$, $C(T) > 0$ trong miền nhiệt độ tính toán.

Với khe nứt chứa không khí, điện trở nhiệt của phần bê tông và phần khe nứt được cộng theo mô hình nối tiếp. Gọi $\bar{e}$ là độ mở khe nứt tương đương, h_e là chiều dài đặc trưng theo phương điện trở nhiệt và $\eta = \bar{e}/h_e$, ta có:

$$\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1-\eta}{\lambda_c} + \frac{\eta}{\lambda_a}, \quad 0 \leq \eta < 1 \quad (3)$$

Ở đây, λ_c và λ_a lần lượt là hệ số dẫn nhiệt của bê tông chưa nứt tại nhiệt độ đang xét và của không khí. Quan hệ (3) bảo đảm $\lambda^* = \lambda_c$ khi $\eta = 0$ và giảm khi khe nứt mở rộng nếu $\lambda_a < \lambda_c$.

2.3. Quan hệ ứng suất và biến dạng nhiệt

Trong phạm vi biến dạng nhỏ, ứng suất phần tử được biểu diễn dưới dạng:

$$\sigma = (1-d)D_0(T):[\varepsilon - \varepsilon_T], \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (4)$$

$D_0(T)$ là tensor độ cứng trước hư hỏng tại nhiệt độ đang xét; d là biến hư hỏng; ε và ε_T lần lượt là biến dạng tổng và biến dạng nhiệt. Tại cấp phần tử lưới, quan hệ được triển khai cho các thành phần biến dạng tương ứng.

Đối với vật liệu đẳng hướng, biến dạng nhiệt được xác định từ hệ số giãn nở nhiệt tức thời:

$$\varepsilon_T = \alpha_{T1}\Delta T + \alpha_{T2}\Delta T^2 + \alpha_{T3}\Delta T^3, \quad \Delta T = T - T_0 \quad (5)$$

$$\alpha(T) = \alpha_{T1} + 2\alpha_{T2}\Delta T + 3\alpha_{T3}\Delta T^2 \quad (6)$$

Trong trường hợp xét đến hư hỏng nhiệt-hóa, chủ yếu do mất nước xi măng và biến đổi thành phần hóa học của đá xi măng:

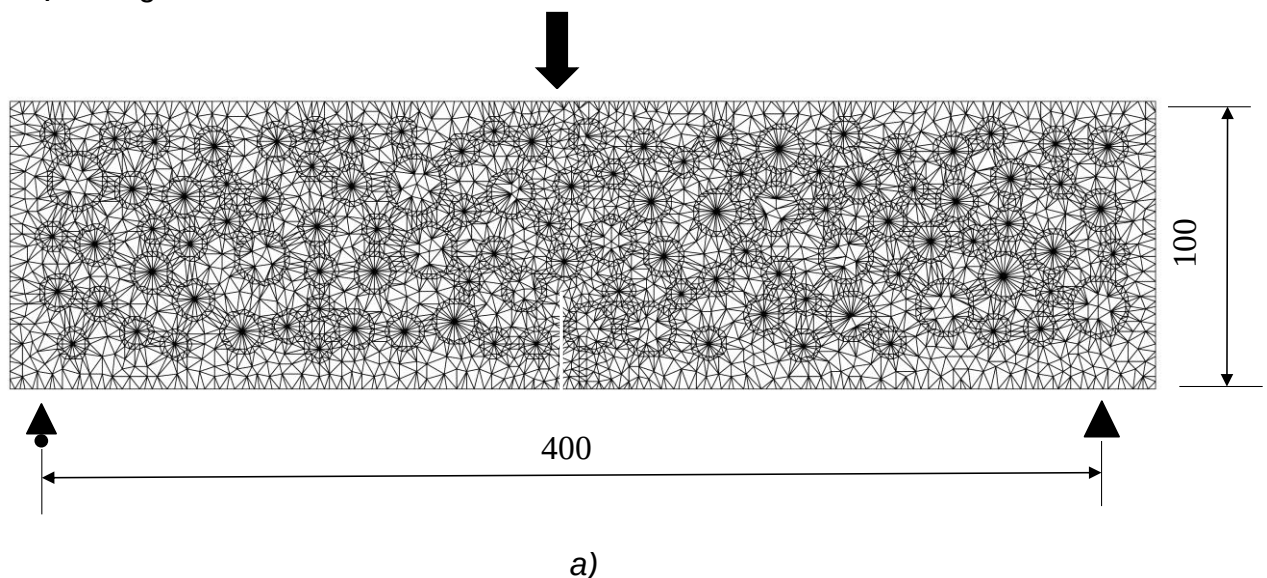
$$(1-d) = (1-d_m)(1-V)$$

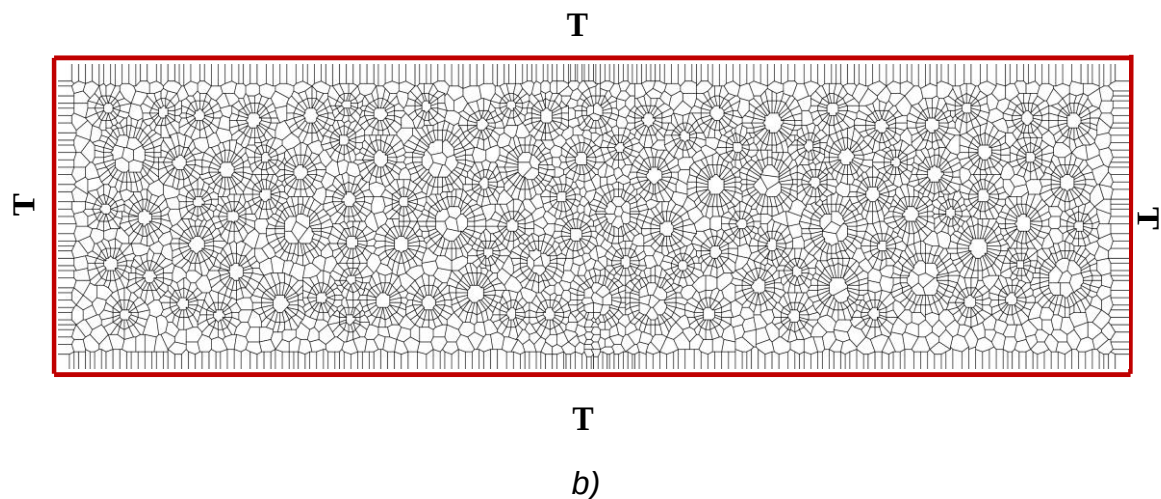
Trong đó: d_m là hư hỏng cơ học; V là hư hỏng nhiệt-hóa, lấy theo nghiên cứu của Gawin [9].

3. ỨNG XỬ DẦM CHỊU TÁC DỤNG TẢI TRỌNG CƠ-NHIỆT

3.1. Hình học và điều kiện biên

Dầm có chiều dài 400 mm, chiều cao và chiều rộng đều bằng 100 mm. Cốt liệu lớn có đường kính thay đổi từ 5 - 20 mm, mật độ 50% được phân bố ngẫu nhiên trong miền nghiên cứu. Giả thiết ứng suất phẳng được sử dụng để mô phỏng. Dầm đặt trên hai gối và chịu tải tại giữa nhịp theo sơ đồ uốn ba điểm ở Hình 2a. Thí nghiệm gia tải được kiểm soát bởi chuyển vị, phản lực tại 2 gối được sử dụng để xây dựng đường cong $P-u$. Các đường cong P -CMOD phản ánh sự mở rộng vết nứt theo tải trọng. Điều kiện biên được thể hiện trong Hình 2.





Hình 2. Hình học và điều kiện biên: a) - Điều kiện biên cơ học; b) - Điều kiện biên nhiệt
Theo điều kiện thí nghiệm tốc độ gia nhiệt là $0,5^{\circ}\text{C}/\text{phút}$. Các mức nhiệt độ dùng để phân tích ứng xử uốn gồm 20°C , 250°C , 400°C , 600°C , 800°C và 1.000°C .

3.2. Thông số vật liệu

Bảng 1 và Bảng 2 trình bày thông số cơ-nhiệt của ba pha vật liệu gồm cốt liệu, đá xi măng và vùng chuyển tiếp ITZ. Mô-đun đàn hồi của các pha lần lượt là 80, 20 và 25 GPa, cho thấy sự khác biệt về độ cứng giữa các thành phần. So với đá xi măng, ITZ có cường độ kéo và cắt thấp hơn, lần lượt là 2 và 4 MPa, trong khi cường độ nén là 45 MPa. Các hệ số nhiệt thể hiện sự khác biệt về quy luật biến dạng nhiệt giữa cốt liệu và hai pha còn lại; hệ số phụ thuộc nhiệt độ của độ dẫn nhiệt mang giá trị âm, còn hệ số tương ứng của nhiệt dung riêng mang giá trị dương.

Bảng 1. Tính chất cơ học của các vật liệu thành phần

	E (Pa)	ν (-)	f_t (Pa)	f_s (Pa)	f_c (Pa)	G_{fc} (J/m ²)	G_{ft} (J/m ²)
Cốt liệu	80×10^9	0,28	10	-	-		
Đá xi măng	20×10^9	0,20	4×10^6	8×10^6	30×10^6	3×10^6	3×10^2
ITZ	25×10^9	0,20	2×10^6	4×10^6	25×10^6	3×10^6	3×10^2

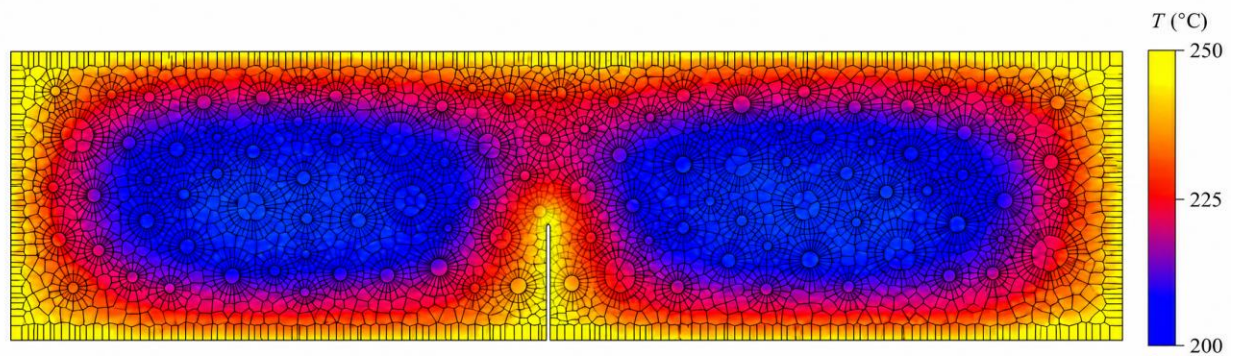
Bảng 2. Tính chất nhiệt của các vật liệu thành phần

	$\alpha_{T1} (^{\circ}\text{C}^{-1})$	$\alpha_{T2} (^{\circ}\text{C}^{-2})$	$\alpha_{T3} (^{\circ}\text{C}^{-3})$	$A_{\lambda} (\text{K}^{-1})$	$A_c (\text{K}^{-1})$
Cốt liệu	$1,5 \times 10^{-5}$	7×10^{-8}	0	-5×10^{-4}	10^{-4}
Đá xi măng	$1,5 \times 10^{-6}$	0	-6×10^{-11}	-2×10^{-4}	10^{-4}
ITZ	$1,5 \times 10^{-6}$	0	-6×10^{-11}	-2×10^{-4}	10^{-4}

4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

4.1. Trường nhiệt độ

Hình 3 trình bày trường nhiệt độ tại 250°C , chênh lệch giữa tâm và biên khoảng 50°C . Có thể nhận thấy nhiệt độ tăng nhanh tại quanh vết nứt mỗi, do khu vực này hình thành nứt do tải trọng cơ học, do đó nhiệt lan truyền nhanh. Đây cũng là nơi xuất hiện hư hỏng lớn nhất trong dầm chịu tải trọng cơ - nhiệt.



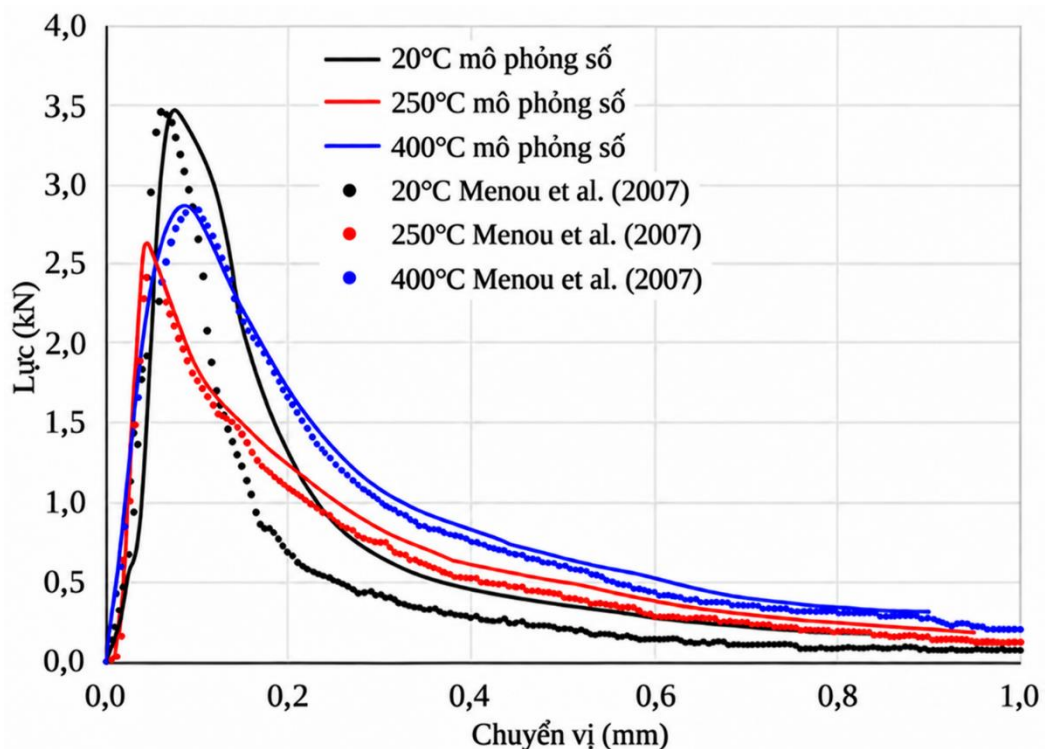
Hình 3. Trường nhiệt tại 250°C

4.2. Ứng xử dầm chịu uốn ở 20°C - 400°C

Hình 4 so sánh các đường cong lực - chuyển vị từ mô hình số với kết quả thực nghiệm của Menou (2007) tại 20, 250 và 400°C. Nhìn chung, mô hình số mô phỏng tốt các giai đoạn đặc trưng ứng xử uốn, gồm giai đoạn trước đỉnh, đạt lực cực đại và mềm hóa sau đỉnh. Lực tại đỉnh trong kết quả mô phỏng lần lượt là 3,45; 2,62 và 2,86 kN, tương đối gần với các giá trị cực đại thực nghiệm.

Tại 20°C, mô hình mô tả tương đối phù hợp lực cực đại nhưng dự báo sự giảm lực sau đỉnh chậm hơn thực nghiệm, đặc biệt trong khoảng chuyển vị 0,15 - 0,60 mm. Tại 250°C, đường cong mô phỏng bám khá sát xu hướng thực nghiệm trên phần lớn nhánh giảm tải, mặc dù còn chênh lệch quanh đỉnh. Tại 400°C, mô hình và thực nghiệm thể hiện sự phù hợp rõ hơn cả về lực tại đỉnh và ứng xử sau đỉnh.

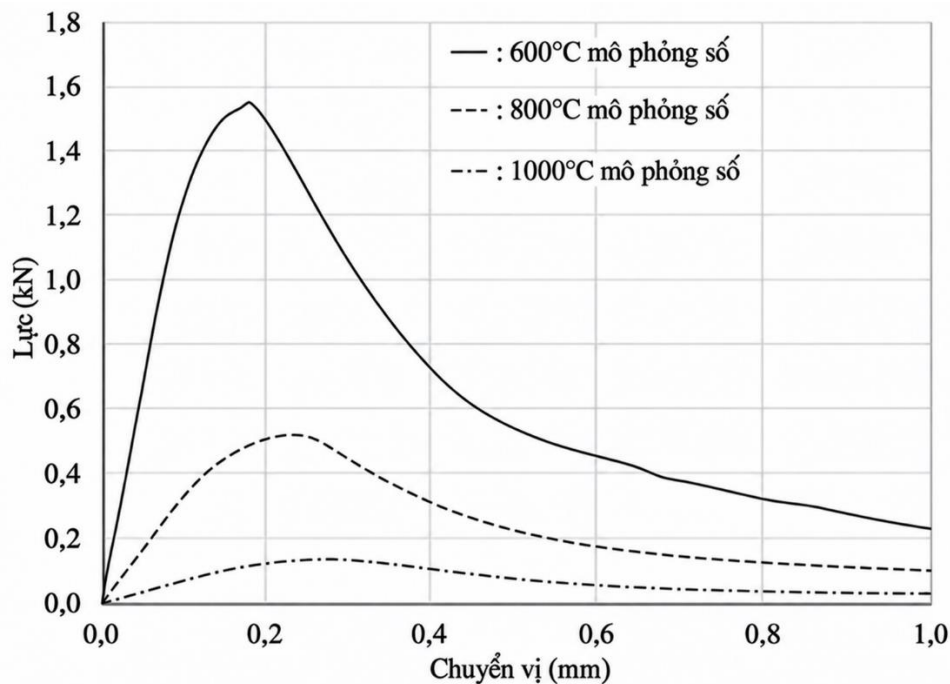
So với 20°C, lực đỉnh mô phỏng tại 250 và 400°C giảm lần lượt khoảng 24% và 17%. Đáng chú ý, lực đỉnh tại 400°C cao hơn tại 250°C khoảng 9%; xu hướng này cũng xuất hiện trong các điểm thực nghiệm, cho thấy quan hệ giữa nhiệt độ và khả năng chịu uốn không đơn điệu trong miền khảo sát.



Hình 4. Đường cong lực - chuyển vị tại 20°C, 250°C và 400°C

4.3. Dự báo ứng xử uốn ở 600°C - 1.000°C

Hình 5 trình bày đường cong lực - chuyển vị ở nhiệt độ cao hơn. Các lực đỉnh tại 600°C, 800°C và 1.000°C lần lượt khoảng 1,54; 0,51 và 0,14 kN. So với lực đỉnh 20°C, tỷ lệ duy trì khả năng chịu tải lần lượt khoảng 45%, 15% và 4%, tương ứng mức giảm khoảng 55%, 85% và 96%. Như vậy, ở nhiệt độ 1.000°C dầm gần như không còn khả năng chịu lực.



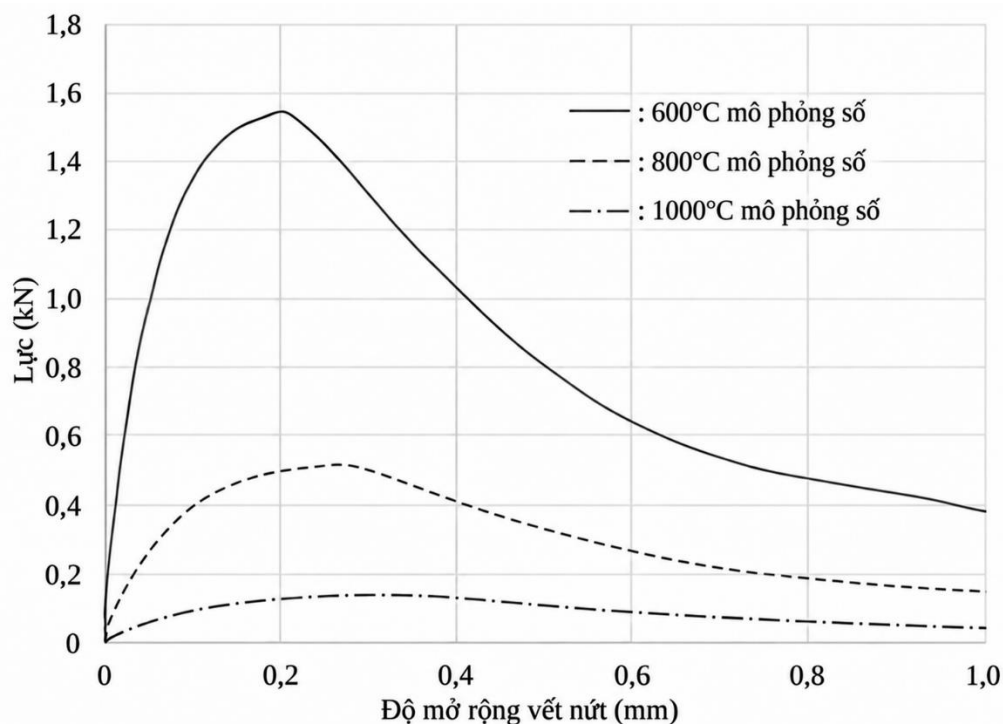
Hình 5. Đường cong lực - chuyển vị dự báo tại 600°C, 800°C và 1.000°C

Chuyển vị tại đỉnh tăng từ khoảng 0,18 mm ở 600°C đến 0,24 mm ở 800°C và 0,29 mm ở 1.000°C. Đồng thời, nhánh trước đỉnh trở nên thoải hơn và lực giảm mạnh, qua đó thể hiện sự suy giảm mạnh khả năng chịu uốn của dầm khi nhiệt độ tăng. Tương quan lực và chuyển vị theo nhiệt độ so với nhiệt độ ban đầu được trình bày trong Bảng 3.

Bảng 3. Tương quan lực và chuyển vị theo nhiệt độ so với nhiệt độ ban đầu

Nhiệt độ (°C)	Lực lớn nhất (kN)	Chuyển vị tại đỉnh (mm)	$P_{max,T}/P_{max,20}$
20°C	3,45	0,07	1,00
250°C	2,62	0,04	0,76
400°C	2,86	0,09	0,83
600°C	1,54	0,18	0,45
800°C	0,51	0,24	0,15
1000°C	0,14	0,29	0,04

Biểu diễn lực theo độ mở rộng vết nứt (CMOD) tại 600°C, 800°C và 1000°C được trình bày trong Hình 6. Nhìn chung, xu thế phát triển tương tự như đường cong lực - chuyển vị. Lực lớn nhất tại đỉnh ở mỗi nhiệt độ gần với giá trị trên Hình 5, trong khi vị trí đỉnh theo CMOD lần lượt xấp xỉ 0,20, 0,27 và 0,35 mm.



Hình 6. Đường cong lực - CMOD dự báo tại 600°C, 800°C và 1.000°C

5. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày mô hình lưới cơ-nhiệt Delaunay - Voronoi cho bài toán dầm bê tông tương đương chịu uốn ba điểm sau tác động nhiệt. Quan hệ dẫn nhiệt qua khe nứt được biểu diễn nhất quán bằng điện trở nhiệt nối tiếp, tạo cơ sở cập nhật tương hỗ giữa trạng thái nứt và trường nhiệt.

So sánh với kết quả thực nghiệm ở 20°C, 250°C và 400°C cho thấy mô hình mô phỏng tốt ứng xử chịu uốn của dầm khi chịu tải trọng cơ - nhiệt. Tuy nhiên, có sự sai khác nhánh sau đỉnh do tính không đồng nhất của bê tông.

Kết quả dự báo ở nhiệt độ 600°C - 1.000°C, lực cực đại giảm từ khoảng 1,54 xuống 0,14 kN, tương ứng tỷ lệ duy trì khoảng 45% và 4% so với tại 20°C. Đồng thời, chuyển vị và độ mở miệng vết nứt (CMOD) tại đỉnh tăng, trong khi khả năng truyền lực sau đỉnh suy giảm rõ rệt. Các kết quả cho thấy sự suy giảm mạnh khả năng chịu uốn của dầm trong miền nhiệt độ cao.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A. Menou, G. Mounajed, H. Boussa, Ch. La Borderie, K. Lafdi. Thermal Damage Approach of Concrete: Application to Specimens Subjected to Combined Compressive and High Temperature Loads. High Temperature Materials and Processes, vol. 27, no. 1, pp. 23-40, 2007, doi: 10.1515/HTMP.2007.27.1.23.
- [2] P. Grassl, C. Pearce. Mesoscale Approach to Modeling Concrete Subjected to Thermomechanical Loading. Journal of Engineering Mechanics, vol. 136, no. 3, pp. 322-328, 2010, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2010)136:3(322).
- [3] T. D. Nguyen, D. T. Pham, M. N. Vu. Thermo-mechanically-induced thermal conductivity change and its effect on the behaviour of concrete. Construction and Building Materials, vol. 198, pp. 98-105, 2019, doi: 10.1016/j.conbuildmat.2018.11.146.
- [4] D.-T. Pham, M.-N. Vu, H. T. Trieu, T. S. Bui, T. Nguyen-Thoi. A thermo-mechanical meso-scale lattice model to describe the transient thermal strain and to

predict the attenuation of thermo-mechanical properties at elevated temperature up to 800°C of concrete. *Fire Safety Journal*, vol. 114, Article 103011, 2020, doi: 10.1016/j.firesaf.2020.103011.

[5] B. Patzák. OOFEM - an Object-oriented Simulation Tool for Advanced Modeling of Materials and Structures. *Acta Polytechnica*, vol. 52, no. 6, pp. 59-66, 2012, doi: 10.14311/1678.

[6] P. Grassl. A lattice approach to model flow in cracked concrete. *Cement and Concrete Composites*, vol. 31, no. 7, pp. 454-460, 2009, doi: 10.1016/j.cemconcomp.2009.05.001.

[7] Q. Ma, R. Guo, Z. Zhao, Z. Lin, K. He. Mechanical properties of concrete at high temperature - A review. *Construction and Building Materials*, vol. 93, pp. 371-383, 2015, doi: 10.1016/j.conbuildmat.2015.05.131.

[8] V. Kodur. Properties of Concrete at Elevated Temperatures. *ISRN Civil Engineering*, vol. 2014, Article 468510, 2014, doi: 10.1155/2014/468510.

[9] D. Gawin, F. Pesavento, B. A. Schrefler. Modelling of hygro-thermal behaviour of concrete at high temperature with thermo-chemical and mechanical material degradation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, no. 13, pp. 1731-1771, 2003, doi: 10.1016/S0045-7825(03)00200-7.